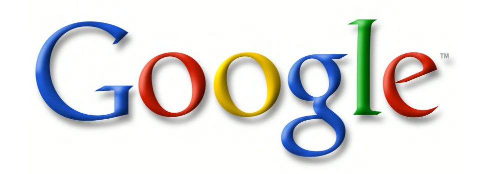
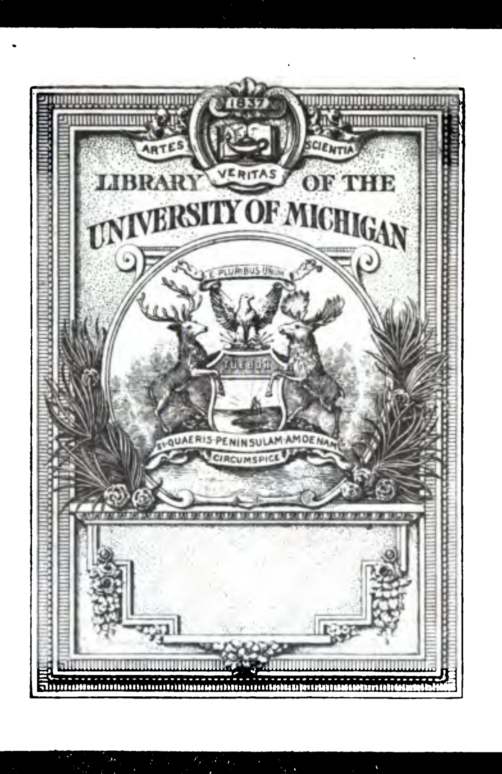
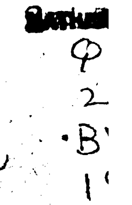



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



HISTOIRE

DES

MATHÉMATIQUES.

II.

HISTOIRE GÉNÉRALE

DES

MATHÉMATIQUES,

DEPUIS LEUR ORIGINE JUSQU'A L'ANNÉE 1808.

PAR CHARLES BOSSUT,

MEMBRE DE L'INSTITUT DE FRANCE, DE CELUI DE BOLOGNE; DES ACADÉMIES DE PÉTERSBOURG, DE TURIN; DE LA SOCIÉTÉ PROVINCIALE D'UTRECHT; DE L'ATHÉNÉE DE LYON, ETC.; MEMBRE DE LA LÉGION D'HONNEUR.

TOME SECOND.



A PARIS,

CHEZ F. LOUIS, LIBRAIRE, RUE DE SAVOIE, N.° 6.

M. DCCC. X.

HISTOIRE

DES

MATHÉMATIQUES.

PÉRIODE QUATRIÈME.

Progrès des Mathématiques depuis la découverte de l'Analyse infinitésimale, jusqu'au commencement du dix-neuvième siècle.

INTRODUCTION.

Les progrès que les mathématiques ont faits dans cette quatrième Période, étant dus, en très-grande partie, à l'*Analyse infinitésimale*, autrement appelée la *méthode des fluxions*, je commencerai par l'histoire de cette nouvelle analyse, et je la conduirai sans interruption jusqu'à nos jours. Ensuite je reprendrai successivement, et suivant le même plan, les autres parties des Mathématiques.

Comme l'analyse infinitésimale s'est développée par degrés et par la solution de divers problèmes, dont les uns sont relatifs à la géométrie pure, d'autres à la mécanique, d'autres à l'astronomie, etc., je serai forcé d'entremêler ces problèmes ; mais il ne résultera de là aucun désordre, aucune confusion, tous ayant le même objet, le progrès de l'art par lequel ils ont été résolus. Je réserverai, pour chaque partie des mathématiques, les problèmes qui s'y rapportent, lorsqu'ils n'ont pas concouru immédiatement au but que je viens d'indiquer.

Tous les faits que je vais rapporter ont été puisés dans les sources, c'est-à-dire, dans les journaux du temps, les mémoires des académies, les traités publiés séparément, les recueils des œuvres de Leibnitz, de Neuton, des frères Bernouilli, etc., qu'on pourra consulter. Il aurait été trop long de citer en détail les titres de tous les écrits sur lesquels je m'appuie, et que j'ai lus avec attention; je l'ai fait seulement lorsque la chose m'a paru nécessaire. Mais j'ai indiqué exactement les dates des découvertes, ou dans mon texte même, ou dans des notes marginales.

Je serai obligé, dans cette quatrième période, d'employer un grand nombre de divisions et de subdivisions, à raison de l'abondance et de la diversité des matières.

CHAPITRE PREMIER.

Histoire de l'Analyse infinitésimale.

SECTION PREMIÈRE.

Découverte de l'Analyse infinitésimale : Leibnitz en publie le premier les élémens; Neuton emploie une méthode semblable dans son livre des Principes mathématiques.

I.

DE toutes les grandes conceptions qui honorent l'esprit humain, l'analyse infinitésimale est peut-être la plus remarquable, soit par le caractère de l'invention, soit par la variété et l'importance de ses usages. Presqu'à sa naissance, elle imprime à la géométrie, et de proche en proche, aux autres parties des mathématiques, un mouvement qui s'accélère avec rapidité, à mesure que l'art se perfectionne. Des problèmes rebelles ou étrangers aux anciennes méthodes, se soumettent sans résistance à la nouvelle analyse. La généralité et l'uniformité des moyens rapprochent sous un même point de vue, des théories qui paraissaient isolées

et indépendantes les unes des autres. Un édifice régulier et magnifique s'élève sur une base solide, qui en maintient toutes les parties dans une juste proportion et un parfait équilibre. Si les deux plus grands géomètres de l'antiquité, Archimède et Apollonius, pouvaient revivre, ils seraient eux-mêmes frappés d'étonnement et d'admiration, en contemplant les progrès que les sciences exactes ont faits depuis leur temps jusqu'au nôtre, à travers des siècles barbares qui ont tant de fois interrompu la marche du génie.

Que l'esprit humain ne prenne pas néanmoins de là une opinion trop orgueilleuse de ses forces: elle n'aurait aucun fondement raisonnable. Si dans cette masse de connaissances accumulées par le temps, on pouvait séparer le produit de la mémoire et fixer la part uniquement due à la sagacité primitive de chaque inventeur, on trouverait un bien grand nombre de petits lots. Tout est soumis à la loi de continuité, dans le monde intellectuel comme dans la succession des êtres physiques. Nous nous traînons, pour ainsi dire, d'une vérité à la vérité voisine. Le génie peut raccourcir la chaîne des principes et des conséquences; mais il ne la détruit point, et jamais il ne marche par sauts. Quelquefois une idée, renfermée en apparence dans un espace fixe et déterminé, s'agrandit peu à peu par la réflexion et forme le noyau

d'un corps de science qui n'a plus de bornes. Il s'en présente ici un grand exemple. La méthode de mener les tangentes aux lignes courbes, par la nouvelle analyse, est la pierre fondamentale du vaste édifice des sciences dans son état actuel, comme un ruisseau, faible à sa naissance, accru successivement par les eaux qu'il reçoit, devient enfin un fleuve majestueux.

Les anciens menaient les tangentes aux sections coniques et aux autres courbes géométriques de leur invention, par des moyens particuliers, dérivés dans chaque cas des propriétés individuelles de la courbe dont il était question. Archimède détermina, d'une manière semblable, les tangentes de la spirale, courbe mécanique. Parmi les modernes, Descartes, Fermat, Roberval, Barrow, Sluze, etc., avaient trouvé des méthodes uniformes plus ou moins simples, pour mener les tangentes des courbes géométriques; ce qui était un grand pas : mais il fallait préalablement que les équations des courbes fussent délivrées des quantités radicales, si elles en contenaient; et cette opération exigeait quelquefois des calculs immenses et même absolument impraticables. La tangente de la cycloïde, courbe mécanique moderne, n'avait été déterminée que par quelques artifices fondés sur sa nature, et dont on ne pouvait tirer aucune lumière pour d'autres exemples. Il res-

tait à trouver une méthode générale qui s'appliquât indistinctement à toutes sortes de courbes, géométriques, ou mécaniques, sans qu'il fût nécessaire en aucun cas de faire disparaître les quantités radicales.

II.

Leibnitz, né en 1646, mort en 1716.

Leibnitz publia cette sublime découverte (et c'est le premier pas du calcul différentiel), dans les actes de Leipsick pour le mois d'octobre 1684. L'écrit à jamais mémorable qui la contient est intitulé : *Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*. On y trouve la méthode pour différencier toutes sortes de quantités, rationnelles, fractionnaires, radicales, et l'application de ces calculs à un exemple fort compliqué, qui indique la voie pour tous les cas. Le problème général des tangentes n'eut dès-lors plus de difficulté. Leibnitz fait aussi l'application de sa méthode à un problème *de maximis et minimis*, dont l'objet est de trouver la route que doit suivre un corpuscule de lumière qui traverse deux milieux différens, afin d'arriver d'un point à un autre par le chemin le plus facile. Le résultat de sa solution est que les sinus des angles d'incidence et de réfraction doivent être entr'eux en raison réciproque des résistances des deux milieux. Enfin,

il applique son nouveau calcul à un problème que Beaune avait autrefois proposé à Descartes, et dont celui-ci n'avait donné qu'une solution incomplète. Il s'agissait de trouver une courbe dont la sous-tangente fût partout la même : Leibnitz fait voir, en deux traits de plume, que la courbe cherchée est telle, que si les abscisses forment une progression arithmétique, les ordonnées forment une progression géométrique : propriété où l'on reconnaît la logarithmique ordinaire.

Quelque temps après, il donna les premiers principes du calcul *sommatoire* ou *intégral*, dans un écrit intitulé : *De Geometriâ reconditâ et Analysi indivisibilium atque infinitorum*. Il y expose la règle fondamentale du calcul intégral : il explique en quoi consistent les problèmes de la méthode inverse des tangentes, que l'on a dans la suite variés de tant de manières. Barrow avait démontré laborieusement que, dans toute courbe, la somme des produits des intervalles infiniment petits des ordonnées, par les sous-perpendiculaires correspondantes de la courbe, est égale à la moitié du carré de l'ordonnée extrême : Leibnitz trouve, en se jouant, le même résultat, au moyen du calcul intégral ; et il observe en général que tous les problèmes des quadratures donnés auparavant par les géomètres, se résolvent sans aucune difficulté par sa méthode. An 1686.

III.

NEWTON, né en 1642, mort en 1727.

Toutes ces nouveautés étaient répandues dans les journaux d'Allemagne avant que Neuton eût encore rien publié qui pût faire connaître qu'il était parvenu de son côté à de semblables méthodes; mais sur la fin de l'année 1686, il mit au jour son livre intitulé : *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, ouvrage immense et profond, dans lequel il s'est proposé d'expliquer par l'observation et le calcul, les principaux phénomènes de la nature et spécialement les mouvemens des corps célestes. Je parlerai en détail de cet ouvrage quand je serai arrivé à l'astronomie physique. Ici, je me contente de remarquer que la clef des plus difficiles problèmes qui y sont résolus, est la méthode des fluxions, ou l'analyse infinitésimale, mais présentée sous une forme moins simple, qui rendait l'ouvrage pénible à suivre. Aussi n'eut-il pas d'abord tout le succès qu'il méritait; on y trouva de l'obscurité, des démonstrations puisées dans des sources trop détournées, un usage trop affecté de la méthode synthétique des anciens, tandis que l'analyse aurait beaucoup mieux fait connaître l'esprit et le progrès de l'invention. L'extrême concision de quelques endroits fit penser, ou que Neuton, doué d'une sagacité extraordinaire, avait un peu trop présumé de la pénétra-

tion de ses lecteurs ; ou que par une faiblesse, dont les plus grands hommes ne sont pas toujours exempts, il avait cherché à surprendre une admiration que le vulgaire accorde facilement aux choses qui passent ou fatiguent son intelligence. Quoi qu'il en soit, la grande célébrité du livre des *Principes* ne date guère que du commencement du siècle dernier, où l'analyse infinitésimale, déjà fort avancée, mit les géomètres en état de le comprendre. Alors on vit, à n'en pouvoir douter, que des théorèmes et des problèmes, enveloppés dans une synthèse compliquée, avaient été trouvés originairement par l'analyse ; mais en même temps on rendit à Neuton la justice de reconnaître, qu'à l'époque de la publication de son livre, il possédait *la* méthode des fluxions dans un haut degré, du moins quant à la partie qui concerne les quadratures des courbes. J'examinerai dans la suite le droit qu'il a, concurremment avec Leibnitz, à l'invention de cette méthode : attendons, pour en parler, les circonstances où cette espèce de procès s'engagea, et continuons ici le précis historique des progrès de la science.

SECTION II.

Leibnitz continue d'étendre sa nouvelle analyse : il est secondé par les frères Bernoulli. Divers problèmes proposés et résolus. Analyse des infiniment petits du marquis de l'Hopital.

I.

DANS le temps que Leibnitz était le plus occupé à perfectionner la nouvelle analyse, il en fut d'abord un peu détourné par une dispute qu'il eut avec les cartésiens sur la mesure des forces vives ; mais il trouva enfin le secret de faire tourner la dispute au succès de son dessein. Il avait avancé que Descartes et ses disciples s'étaient trompés en mesurant la force des corps en mouvement par le simple produit de la masse et de la vitesse, et qu'il la fallait mesurer par le produit de la masse et du carré de la vitesse ; sa preuve se réduisait à ce raisonnement très-simple : De l'aveu de tout le monde, il faut la même force pour élever un poids d'une livre à quatre pieds de hauteur, que pour élever un poids de quatre livres à un pied de hauteur : or, un corps tombant de quatre pieds, et un corps tombant d'un pied, acquièrent des vitesses qui

Act. Lips. 1686.

sont comme deux et un : donc, selon les cartésiens, les forces seraient ici comme deux et quatre, au lieu d'être égales. Les cartésiens répondirent qu'il fallait avoir égard à la différence des temps des chutes dans les deux cas : Leibnitz répliqua que la considération du temps devait être écartée ; que la force existait en elle-même, et qu'il importait peu de savoir comment elle avait été acquise. Bientôt on se perdit dans des subtilités métaphysiques qui faisaient briller l'esprit et n'éclaircissaient point la question. Enfin, l'égalité des temps, que les cartésiens exigeaient absolument pour la mesure et la comparaison des forces motrices, fit naître à Leibnitz l'idée d'un problème curieux, qu'il leur proposa comme un moyen de rendre au moins la discussion utile à la géométrie : c'était de trouver la courbe *isochrone* ; c'est-à-dire, *la courbe qu'un corps pesant doit suivre pour s'éloigner ou s'approcher également, en temps égaux, d'un plan horizontal*. Mais les cartésiens, jusque-là fort prodigues d'*explications*, de *remarques*, de *répliques*, gardèrent ici un profond silence, et l'analyse de leur maître, tant exaltée par eux, ne leur fournit aucun moyen de répondre au défi qui leur était adressé.

Huguens, qui n'avait pris aucune part à la question sur la mesure des forces vives, jugea le problème digne de son application ; il publia les pro- An 1687.

priétés et la construction de la courbe, sans en ajouter les démonstrations. Cette courbe est la seconde parabole cubique.

II.

Leibnitz, après avoir attendu en vain pendant
An 1689. trois ans la solution des cartésiens, nomma la même courbe qu'Huguens, et démontra qu'elle satisfait au problème. Et pour *offrir*, disait-il, la *revanche* à ses adversaires, il leur proposa de trouver la courbe *isochrone paracentrique*, où le corps doit maintenant s'éloigner ou s'approcher également, en temps égaux, d'un point fixe; mais ce second problème était plus embarrassant que l'autre, et la prétendue politesse de Leibnitz pouvait être regardée comme un persiflage.

Cette petite guerre, et d'autres travaux absolument étrangers aux mathématiques, enlevaient à Leibnitz un temps qu'il eût voulu consacrer tout entier au progrès de la nouvelle géométrie. Malgré tant de distractions, il répandait sans cesse dans les journaux des vues qui tendaient à ce but. Bientôt il fut secondé par deux hommes illustres qui saisirent sa méthode avec ardeur, qui se l'approprièrent tellement, et qui en firent tant de belles applications, que Leibnitz a publié plusieurs fois dans les journaux, avec un abandon digne de son génie, qu'elle leur était aussi redevable qu'à lui-

même. On voit que je veux parler des deux frères, Jacques Bernoulli et Jean Bernoulli.

III.

L'aîné (Jacques Bernoulli), déjà célèbre par différens ouvrages de géométrie, de mécanique et de physique, avait initié son frère aux mathématiques. Les progrès qu'ils firent conjointement ou séparément dans l'analyse leibnitienne furent rapides. Une noble émulation, resserrée par les liens du sang, de l'amitié et de la reconnaissance, dirigea leurs études pendant deux ou trois ans. Avides seulement de s'instruire, ils n'avaient alors devant les yeux que la sublime ambition de pénétrer dans le labyrinthe scientifique ouvert à leur curiosité; et cette malheureuse rivalité qui tient à l'envie, ne troublait point encore de si douces jouissances.

Jacques Bernoulli, né en 1654, mort en 1705.

Jean Bernoulli, né en 1667, mort en 1748.

A son entrée dans la carrière, Jacques Bernoulli donna la solution et l'analyse du problème de la courbe isochrone ordinaire : il trouva, comme Leibnitz et Huguens, que cette courbe est la seconde parabole cubique. Il prit de là occasion de proposer aux géomètres un problème que Galilée avait autrefois inutilement attaqué : c'était de *trouver la courbe que forme la chaînette*, ou *un fil pesant flexible et inextensible, attaché par ses extrémités à deux points fixes*.

Divers problèmes.

An 1690.

Cet usage de proposer publiquement des pro-

blèmes, déjà introduit depuis long-temps parmi les géomètres, et auquel Leibnitz et les frères Bernoulli ont principalement donné une grande vogue, était alors un puissant moyen d'aiguiser les esprits, et de faire concourir toutes leurs facultés au progrès d'une géométrie naissante : tel fut l'effet que produisit le problème de la chaînette.

An 1691. Pendant qu'on en cherchait la solution, Jacques Bernoulli publia deux mémoires, où il détermine, par la nouvelle analyse, les tangentes, les quadratures des espaces, et les rectifications de trois fameuses courbes : la spirale *parabolique*, la spirale *logarithmique*, et la *loxodromie* ; à quoi il joignit, par supplément, la mesure de l'aire des triangles sphériques. Ces deux écrits contiennent les premiers essais un peu développés qu'on ait donnés du calcul intégral, au progrès duquel ils ont en effet sensiblement contribué. L'auteur ne se borna pas à la simple théorie : il indiqua quelques propriétés utiles de la loxodromie.

De son côté, Leibnitz fit paraître sur la quadrature arithmétique des sections coniques qui ont un centre, un écrit dans lequel il établit des formules analytiques très-simples et facilement convertibles en nombres ; il appliqua sa méthode à quelques problèmes concernant la loxodromie.

IV.

Le problème de la chaînette fut résolu par Huguens, Leibnitz et Jean Bernoulli. Comme les deux frères Bernoulli travaillaient alors ordinairement en commun, on présume que la solution de Jean Bernoulli est l'ouvrage de l'un et de l'autre. On ne considéra d'abord que des chaînettes uniformément pesantes : Jacques Bernoulli étendit la solution au cas où le poids de la chaînette varierait d'un point à l'autre suivant une loi donnée. De proche en proche, et par l'analogie des matières, le même géomètre détermina la courbe que forme un arc tendu, celle d'une lame élastique arrêtée solidement par un bout, et chargée à l'autre d'un *poids* donné ; il fixa plus particulièrement son attention sur la courbure que prend une voile flexible enflée par le vent, espérant que cette recherche pourrait être utile à la navigation ; il trouva que dans la supposition où le vent, après avoir frappé la voile, aurait toute liberté de s'échapper, la courbe de la voile est une chaînette ordinaire, mais que si la voile, toujours supposée parfaitement flexible, était enflée par un fluide qui pesât sur elle verticalement, comme l'eau pèse sur les parois d'un vase qui la contient, elle formerait une courbe connue sous le nom de *lintéaire*, et dont la nature est exprimée par la même équation

An 1691.

An 1692.

que la courbe *élastique* ordinaire, où les extensions sont supposées proportionnelles aux forces appliquées à chaque point. L'identité des deux courbes n'était pas facile à reconnaître : Jacques Bernoulli montra dans cette question, et quelques autres du même genre, une profonde sagacité.

V.

A mesure qu'il avançait dans ses méditations sur la courbure de la voile, il en communiquait successivement les progrès par lettres à son frère, alors absent de Bâle. On voit clairement que ces ouvertures conduisirent Jean Bernoulli à la solution qu'il publia du même problème, dans le journal des savans, et d'où il résulte également que la courbe de la voile est une chaînette. Lui-même, par la manière dont il expose les faits, nous fournit la preuve du secours qu'il avait emprunté. N'a-t-on pas droit après cela d'être un peu surpris de trouver ici les premiers traits de cette jalousie qu'il montra dans la suite trop ouvertement contre son ancien maître ?

An 1692.

VI.

Propriétés de certaines courbes.

An 1692.

La théorie des courbes qui, roulant sur elles-mêmes, en produisent d'autres, fut pour Jacques Bernoulli un champ de découvertes remarquables. Il suppose qu'une courbe quelconque étant donnée

et considérée comme immobile, on fasse rouler sur elle une courbe égale et semblable; il détermine la *développée* et la *caustique* de l'espèce de roulette que décrit un point de la courbe roulante; il en tire deux autres courbes analogues, qu'il appelle l'*antidéveloppée* et la *péricaustique*. Toutes ces courbes offraient une foule de propriétés bien dignes de piquer la curiosité des géomètres, surtout dans un temps où ils étaient encore peu exercés à manier la nouvelle analyse. En appliquant ses méthodes à la spirale logarithmique, Jacques Bernoulli trouva que cette courbe est elle-même sa développée, sa caustique, son antidéveloppée et sa péricaustique : caractère singulier, dont il fut tellement émerveillé, qu'il ne put s'empêcher de témoigner avec chaleur que si l'usage était encore, comme au temps d'Archimède, de placer des figures et des inscriptions sur le tombeau des géomètres, il eût désiré que l'on gravât sur le sien une spirale logarithmique, avec ces mots : *Eadem mutata resurgo*.

La cycloïde a des propriétés analogues à celles que je viens de rapporter de la spirale logarithmique : Jacques Bernoulli les fit connaître dans une addition à son premier mémoire; il avertit en même temps que son frère était parvenu de son côté à des résultats semblables.

Je ne dois pas omettre un écrit de Leibnitz sur

les courbes qui se forment d'une infinité de lignes droites ou courbes, qui vont concourir en une suite de points soumis à une loi donnée. Cet écrit peu développé contient des vues générales pour la solution de plusieurs problèmes, tels que ceux des caustiques, des courbes qui en coupent une suite d'autres sous un angle donné, etc. Leibnitz se livrait rarement aux ouvrages de détail : aussitôt qu'il se voyait en possession d'une méthode, il l'abandonnait, laissant à d'autres le plaisir de l'étendre et de la perfectionner.

VII.

Problème de la voûte carrable. [illegible] An 1692.

Viviani, né en 1622, mort en 1703.

Dans cette multitude de problèmes, il en parut un fort curieux, proposé par Viviani, célèbre géomètre italien, sous ce titre : *Ænigma geometricum de miro opificio testitudinis quadrabilis hemisphæricæ*. L'auteur feignait que, parmi les monumens de l'ancienne Grèce savante, il existait encore un temple de forme hémisphérique, percé de quatre fenêtres égales, avec un tel art, que le reste de la voûte était absolument carrable; et il espérait que *les illustres analystes du siècle* (il désignait ainsi les géomètres en possession des nouveaux calculs), devineraient facilement cette énigme. Il ne fut pas trompé dans son espérance : le jour même où Leibnitz et Jacques Bernoulli reçurent le programme de Viviani, ils résolurent le

problème ; et les autres géomètres *infinitaires* l'eussent sans doute aussi résolu, s'il était parvenu assez tôt à leur connaissance. Viviani était profond dans l'ancienne géométrie : il s'était principalement distingué par la *divination* ou la *restitution* des cinq livres des coniques de l'ancien Aristée, qui sont perdus ; mais lorsque la géométrie des infiniment petits parut, il était trop âgé pour l'étudier et l'approfondir ; c'était d'ailleurs un homme véritablement modeste, et qui n'avait point eu l'intention d'embarrasser les *illustres analystes*. Néanmoins il faut reconnaître que sa propre solution, fondée sur la méthode synthétique des anciens, est très-recommandable par sa simplicité et son élégance : il démontra qu'on satisfait à la question en élevant perpendiculairement à la base de la voûte hémisphérique deux cylindres droits, dont les axes passent par les milieux de deux rayons qui forment un même diamètre du cercle de la base.

VIII.

Un problème qui se rapporte à la méthode *de maximis et minimis*, occupa long-temps sans succès les frères Bernoulli ; c'était de *trouver le jour du plus petit crépuscule pour un lieu dont la latitude est donnée*. Cette question, traitée par la méthode analytique, mène à une équation du quatrième degré, dont il est embarrassant de sé- An 1692.

parer les racines utiles d'avec celles qui doivent être rejetées ; mais, en employant la méthode synthétique, ils parvinrent, chacun de leur côté, à une analogie très-simple et très-commode pour le calcul astronomique.

La place de professeur de mathématiques en l'université de Bâle, qu'occupait Jacques Bernoulli, valut à ses élèves et au public un excellent traité sur la sommation des suites ; la première partie avait paru en 1689, la seconde fut publiée en 1692.

IX.

Nouveaux progrès.

Toutes les parties de la nouvelle géométrie marchaient rapidement. Les problèmes volaient de tous côtés ; et les journaux étaient devenus une espèce d'arène savante, où l'on voyait combattre les plus grands géomètres du temps, Huguens, Leibnitz, les frères Bernoulli, Neuton, et le marquis de l'Hopital qui y soutint dignement, pendant plusieurs années, l'honneur de la France.

L'Hopital, né en 1661, mort en 1704.

Le problème suivant, proposé par Jean Bernoulli : *trouver une courbe telle que les tangentes terminées à l'axe fussent en raison donnée avec les parties de l'axe, comprises entre la courbe et ces tangentes*, fut résolu par Huguens, Leibnitz, Jacques Bernoulli et le marquis de l'Hopital ; mais tous se contentèrent de donner de simples constructions sans démonstrations.

An 1693.

Huguens rendit à ce sujet un témoignage d'autant plus honorable aux nouveaux calculs, que ce grand homme ayant fait plusieurs sublimes découvertes sans ces calculs, pouvait être dispensé d'en célébrer les avantages ; il avoue qu'il voyait *avec surprise et admiration l'étendue et la fécondité de cet art ; que de quelque côté qu'il tournât la vue, il en découvrait de nouveaux usages, et qu'enfin il y concevait un progrès et une spéculation infinie.* Quel malheur qu'il ait été enlevé aux sciences dans un âge où, avec le secours de ce nouvel instrument, il pouvait encore leur rendre tant d'importans services !

Tschirnaus avait fait connaître, depuis quelques années, les fameuses courbes appelées *caustiques ;* elles sont formées, comme on sait, par le concours des rayons de lumière qu'une autre courbe donnée a réfléchis ou rompus. Sans autre secours que celui de la géométrie ordinaire, il en avait découvert plusieurs belles propriétés, comme, par exemple, qu'elles sont égales à des lignes droites, quand les courbes qui les produisent sont géométriques. L'analyse infinitésimale facilita extrêmement toutes ces recherches, et Jacques Bernoulli les poussa très-loin, principalement la théorie des caustiques par réfraction.

TSCHIRNAUS, né en 1651, mort en 1708.

L'abondance des matières, et les bornes de cet ouvrage, me forcent de passer sous silence plu-

sieurs autres mémoires du même Jacques Bernoulli sur divers sujets de géométrie, de mécanique, d'hydraulique, etc. ; j'omets également les réflexions de Leibnitz sur la manière de résoudre les problèmes des quadratures, par la construction de certaines courbes qu'il décrit par des mouvemens assujétis à des lois données. La description de la *tractoire* est un exemple de ces mouvemens ; et c'est en effet à l'occasion de cette courbe, dont Claude Perrault lui avait demandé la nature, que Leibnitz proposa ses remarques où l'on reconnaît sa subtilité ordinaire.

Je reviendrai dans la suite à un autre écrit de Leibnitz, intitulé : *Nova calculi differentialis applicatio*, où se trouve le germe de ces équations qu'on appelle aujourd'hui *solutions singulières* ou *intégrales particulières*.

Leibn. Op. t. III, p. 296.

X.

Il paraît que dans ces commencemens, les géomètres ne connaissaient pas, au moins distinctement, la nécessité d'ajouter des constantes arbitraires aux intégrales des équations différentielles, afin de donner aux solutions toute la généralité dont elles peuvent être susceptibles. J'ai déjà remarqué que Jacques Bernoulli avait trouvé, en 1694, la solution du problème de la courbe isochrone ordinaire : cette solution est le premier

Jacq. Bern. Op. pag. 423.

exemple qu'on ait de l'intégration d'une équation différentielle ; mais l'auteur n'ajouta point de constante à l'intégrale. En 1695, il intégra, avec la même omission, l'équation différentielle de la courbe d'*équilibration* dans les ponts-levis. Ibid. pag. 625.

Jean Bernoulli, dans sa dissertation de *Motu musculorum*, donnée en 1690, intègre aussi une équation différentielle, sans l'addition de la constante. Joh. Bern. Op. tom. 1, pag. 108.

Cette même année 1694, Jacques Bernoulli résolut le problème de la courbe isochrone *paracentrique*, sans ajouter de constante à l'intégrale.

Leibnitz, qui avait proposé et résolu ce problème depuis long-temps, en publia enfin la solution, mais une solution *complète*, c'est-à-dire avec l'addition d'une constante arbitraire ; et il prit cette occasion de faire remarquer que cela était nécessaire dans tous les cas pour compléter les intégrales. Jacques Bernoulli convint lui-même qu'il avait eu tort d'y manquer dans la solution de la courbe paracentrique ; assurant d'ailleurs que c'était un pur *oubli* de sa part, occasionné par un peu de *précipitation*, et donnant pour preuve qu'il connaissait la loi des constantes, sa construction de la courbe élastique, publiée un peu auparavant. Jacq. Bern. Op. pag. 649.

Quoi qu'il en soit, on doit reconnaître que malgré ce défaut, la solution de Jacques Bernoulli était dans ce temps-là un effort de génie. En rap-

portant la courbe à des coordonnées perpendiculaires entr'elles, suivant l'usage ordinaire, on parvenait sans peine à une équation différentielle du premier ordre, mais dans laquelle les indéterminées étaient d'ailleurs fort mêlées; ce qui rendait l'intégration très-difficile. Jacques Bernoulli prit un détour : il laissa les ordonnées parallèles entr'elles, et perpendiculaires à un axe horizontal; mais il prit pour abscisses les cordes d'une infinité de cercles, qui tous ont leurs centres au point d'où le corps doit partir. Par là, il obtint une équation, dont les indéterminées se séparaient d'elles-mêmes, et la construction fut réduite aux quadratures ou aux rectifications ordinaires des courbes. Quelque temps après, Jean Bernoulli résolut aussi le problème; il donna lui-même les plus grandes louanges à sa solution, ce qui dispense d'y en ajouter. Je remarquerai seulement que cette solution revient, dans le fond, à celle de Jacques Bernoulli.

XI.

Tom. 1, p. 10. Nous apprenons, dans le *Commercium epistolicum* de Leibnitz et de Jean Bernoulli, publié seulement en 1745, que dès l'année 1694 ils avaient trouvé l'un et l'autre, chacun de leur côté, cette branche de la nouvelle analyse, qu'on appelle le *calcul exponentiel*. Leibnitz a la priorité de

date; mais Jean Bernoulli a fait de lui-même la découverte; il publia, en 1697, les règles et l'usage de ce calcul, et on croit ordinairement qu'il en est le premier et même le seul inventeur.

Ce même *Commerce* offre, sous l'année 1695, une remarque importante de Leibnitz sur l'analogie qui règne entre les puissances d'un polynôme composé de termes variables, et les différentielles (du même ordre) du produit de ces termes. De là Jean Bernoulli déduisit une méthode pour intégrer, en certains cas, des formules différentielles de tous les ordres.

XII.

Courbe d'équilibration des ponts-levis.

An 1695.

On ne peut pas compter au nombre des problèmes les plus difficiles, celui de la courbe d'équilibration dans les ponts-levis.; mais il avait une utilité apparente et il mérite d'être remarqué, puisque le marquis de l'Hôpital, Leibnitz, Jacques Bernoulli et Jean Bernoulli en donnèrent des solutions ou des constructions.

On trouve, vers le même temps, un excellent mémoire de Jacques Bernoulli, concernant la courbe élastique, les courbes isochrones, le chemin de moyenne direction dans la course des navires, la méthode inverse des tangentes, etc. A ces discussions de science, l'auteur entremêle quelques détails historiques qu'on lit avec plaisir. Il repousse

pour la première fois les attaques injustes que son frère lui avait faites en plusieurs occasions : il l'avertit de modérer ses prétentions, d'attacher moins d'importance à des découvertes que l'instrument dont ils étaient munis l'un et l'autre, rendait faciles, et de reconnaître que *comme les quantités en géométrie croissent par degrés, semblablement tout homme pourvu du même instrument aurait trouvé par degrés les mêmes résultats* : paroles modestes et bien remarquables dans la bouche de l'un des plus grands géomètres que la terre ait portés.

Ce mémoire était terminé par l'invitation que Jacques Bernoulli faisait aux géomètres, d'intégrer une équation différentielle très-générale et du plus grand usage dans l'analyse. La solution qu'il avait trouvée de ce problème, et celles qu'en donnèrent Leibnitz et Jean Bernoulli, furent publiées dans les actes de Leipsick.

XIII.

An 1696. Il parut, dans l'année 1696, un grand nombre d'ouvrages qui donnèrent une nouvelle extension à l'analyse infinitésimale : tels furent le mémoire de Jacques Bernoulli sur les quadratures des surfaces sphéroïdales, où l'on trouve des problèmes analogues à celui de Viviani, mais plus généraux et plus compliqués ; plusieurs beaux théorèmes de

Jean Bernoulli sur ces mêmes quadratures; la troisième partie du traité *des suites* de Jacques Bernoulli, et principalement le célèbre livre du marquis de l'Hôpital, intitulé : *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes,* sur lequel je m'arrêterai un moment.

Il y avait long-temps qu'on désirait un pareil ouvrage. « Jusque-là, dit Fontenelle dans l'éloge » du marquis de l'Hôpital, la nouvelle géométrie » n'avait été qu'une espèce de mystère, et, pour » ainsi dire, une science cabalistique renfermée » entre cinq ou six personnes. Souvent on don» nait dans les journaux les solutions, sans laisser » paraître la méthode qui les avait produites; et » lors même qu'on la découvrait, ce n'étaient que » quelques faibles rayons de cette science qui s'é» chappaient, et les nuages se refermaient aussi» tôt. Le public, ou pour mieux dire, le petit » nombre de ceux qui aspiraient à la haute géo» métrie, étaient frappés d'une admiration inutile » qui ne les éclairait point; et l'on trouvait le » moyen de s'attirer leurs applaudissemens, en re» tenant l'instruction dont on aurait dû les payer ». L'ouvrage du marquis de l'Hôpital dévoila toute la science du calcul différentiel; il fut reçu avec un applaudissement universel, compté dès-lors, et même encore aujourd'hui, au nombre des livres classiques. Mais le temps n'était pas arrivé de trai-

ter de même le calcul intégral, qui est immense dans les détails, et qui, malgré les progrès considérables qu'il a faits, n'est pas encore, à beaucoup près, entièrement inventé. Leibnitz promettait un ouvrage qui, sous le titre de *Scientia infiniti,* devait comprendre le calcul différentiel et le calcul intégral; mais cet ouvrage, qui aurait été alors fort utile, n'a jamais vu le jour.

SECTION III.

Insigne mouvement dans la théorie des Maxima *et des* Minima. *Dispute des frères Bernoulli sur le problème des* Isopérimètres.

I.

An 1696. Tous les problèmes *de Maximis et Minimis,* qu'on avait résolus jusqu'au temps où nous sommes, n'avaient eu pour objet que de trouver, dans le nombre des fonctions explicites qui ne renferment qu'une seule variable, ou réductibles à une seule variable, celles qui, parmi leurs semblables, peuvent devenir des *maxima* ou des *minima.* Descartes, Fermat, Sluze, Hudde, etc., s'étaient fait des méthodes particulières pour ces problèmes : celle du calcul différentiel les avait toutes fait dis-

paraître par sa simplicité et sa généralité. Il restait une autre classe de problèmes du même genre, mais beaucoup plus profonde et plus compliquée, où le calcul différentiel et le calcul intégral étaient nécessaires l'un et l'autre : elle consistait à trouver parmi les fonctions *implicites* ou affectées de signes *sommatoires*, celles qui donnent des *maxima* ou des *minima*; comme, par exemple, la courbe qui renferme le plus grand espace suivant des conditions données, ou qui produit par sa révolution le plus grand solide entre des limites pareillement données, etc. Neuton, après avoir déterminé, parmi tous les cônes droits tronqués, de même base et de même hauteur, celui qui, étant mu dans un fluide par la plus petite base (inconnue) suivant la direction de son axe, éprouve la moindre résistance possible (ce qui était un problème de l'ancien genre), avait énoncé sans démonstration une proportion, d'où l'on tire l'équation différentielle de la courbe, qui, en tournant autour de son axe, produit *le solide de la moindre résistance* : problème relatif au second genre. Le principe de cette solution, dont Neuton avait fait mystère suivant son usage, est que, lorsqu'une propriété de *maximum* ou de *minimum* convient à une courbe ou à une portion finie de courbe, elle convient aussi à une portion infiniment petite : il a de l'analogie avec des moyens qu'on a

Prin. Math. lib. II, prop. 34.

employés souvent dans la géométrie; comme, par exemple, lorsqu'on démontre l'égalité d'une zône sphérique avec la surface correspondante du cylindre circonscrit, par l'égalité réciproque de leurs élémens. Mais, quand même Neuton aurait indiqué formellement ce principe, le problème général avait encore, dans chaque cas particulier, sa difficulté particulière, soit pour trouver l'équation différentielle de la courbe, soit pour parvenir à l'intégration. Les sciences ont donc une obligation de la plus haute importance à Jean Bernoulli, d'avoir attiré l'attention des géomètres sur cette An 1697. théorie générale, en leur proposant le fameux problème de la *Brachistocrone, ou de la courbe, telle qu'un corps pesant descendant le long de sa concavité, arrive dans le moindre temps possible d'un point à un autre, les deux points n'étant pas situés dans la même ligne verticale.* Il est certain qu'à l'époque dont il s'agit, ce problème était plus difficile que celui du solide de la moindre résistance, dont Neuton avait même laissé la solution incomplète, puisqu'il n'avait pas intégré l'équation différentielle de la courbe génératrice.

Au premier coup d'œil, on est porté à croire que la ligne droite, comme le plus court chemin d'un point à l'autre, doit être aussi le chemin de la plus vite descente; mais le géomètre attentif

s'abstient de prononcer, lorsqu'il considère que, dans une courbe concave, décrite d'un point à l'autre, le mobile descend d'abord plus verticalement, et acquiert par conséquent une plus grande vitesse que sur le simple plan incliné; ce qui produit une compensation et peut faire arriver le corps plus promptement, suivant la ligne courbe que suivant la ligne droite. La métaphysique seule ne peut donc pas résoudre la question, et il fallait absolument recourir à un calcul précis. Or, le résultat de ce calcul fit connaître qu'en effet le chemin cherché est une courbe, et un arc de cycloïde renversée : nouvelle propriété très-remarquable de la cycloïde, que les recherches de Huguens et de Pascal avaient déjà rendue si célèbre.

Leibnitz résolut le problème le jour même qu'il reçut le programme de Jean Bernoulli, à qui il en donna aussitôt avis : tous deux convinrent de tenir leurs solutions cachées, et d'accorder un an aux autres géomètres pour s'exercer sur une si belle question. Ce délai fut annoncé dans les journaux et dans une feuille volante que Jean Bernoulli envoya de tous côtés.

Leib. et John. Bern. com. Epist. tom. 1, pag. 172.

Il n'était pas encore expiré, lorsqu'outre les solutions de Jean Bernoulli et de Leibnitz, il en parut encore trois autres, dont les auteurs étaient Neuton, le marquis de l'Hôpital et Jacques Bernoulli. Celle de Neuton parut anonyme dans les

Transactions philosophiques de la société royale de Londres; mais Jean Bernoulli devina l'auteur, *tanquam*, dit-il, *ex ungue leonem*.

Le marquis de l'Hôpital eut beaucoup de peine à trouver la sienne : elle peut néanmoins se tirer assez facilement d'un principe qu'il emploie lui-même, lorqu'il cherche la route que doit suivre un voyageur pour arriver, dans le moindre temps possible, d'un lieu à un autre, en traversant deux campagnes où il éprouve à marcher, des résistances qui font varier la vitesse dans un rapport donné; car, si l'on regarde les deux campagnes comme les deux élémens d'une courbe située dans un plan vertical, et si l'on suppose, conformément à la théorie de la chute des graves, que les vitesses d'un corps pesant le long d'une courbe quelconque, sont comme les racines carrées des hauteurs d'où le corps est descendu, on parvient en un instant à l'équation différentielle de la cycloïde. Mais personne ne fit alors cette remarque, et ne rapprocha des idées qui nous paraissent aujourd'hui si voisines.

An. des infiniment petits, art. 59.

Enfin, Jacques Bernoulli donna, avant l'expiration du terme prescrit par son frère, une solution où il démontre que la courbe demandée est un arc de cycloïde. En la cherchant, il s'était élevé à des problèmes *sur les isopérimètres*, d'une spéculation encore plus profonde; et après les avoir

résolus, il les proposa publiquement, à la suite de sa méthode pour la courbe de la plus vite descente.

Toutes ces solutions parurent dans le même temps, et sans que les auteurs eussent pu tirer aucune lumière les uns des autres.

II.

Dispute des frères Bernoulli sur le problème des isopérimètres.

La rivalité de gloire qui divisait depuis long-temps les frères Bernoulli, se déploya toute entière dans cette occasion : elle avait été d'abord un peu tempérée par l'habitude de se voir, au moins de temps en temps, et par l'entremise de quelques amis communs; mais le cadet ayant été nommé professeur de mathématiques à Groningue, en 1695, ils ne conservèrent bientôt plus de relations particulières; ils ne se parlaient plus que dans les journaux, et c'était pour se proposer les problèmes les plus difficiles. Jean Bernoulli était l'agresseur; mais peut-être son frère avait-il montré un peu trop de hauteur dans la première réponse qu'il lui fit, et dont j'ai rapporté le précis. Les cœurs s'étaient aliénés; Jean Bernoulli revenait souvent à la charge; et son ancien maître n'était pas homme à souffrir plus long-temps des attaques injustes par elles-mêmes, et indépendamment des motifs de reconnaissance qui auraient dû les modérer ou les arrêter. Dans ces dispositions, Jacques Bernoulli

voulant enfin se venger d'une manière éclatante, mais en même temps utile à la géométrie, provoqua nominativement son frère à résoudre le problème suivant : *Trouver parmi toutes les courbes isopérimètres entre des limites données ; une courbe telle que, construisant une seconde courbe dont les ordonnées soient des fonctions quelconques des ordonnées, ou des arcs de celle-là, l'aire de la seconde courbe forme un* maximum *ou un* minimum. A ce problème principal, il en joignit un autre plus analogue à celui de la Brachystochrone : c'était de *trouver, parmi toutes les cycloïdes qu'un corps grave peut décrire pour arriver d'un point à une ligne donnée de position, la cycloïde qui est décrite dans le moindre temps possible.* Il termina son défi à peu près en ces termes : « Une per» sonne dont je réponds (*Prodit* NON NEMO *pro » quo caveo*) s'engage à donner, indépendam» ment des louanges méritées, un prix de cinquan» te florins à mon frère, sous la condition que dans » trois mois il promette de résoudre ces problè» mes, et que dans un an il en publie des solu» tions légitimes : si au bout de ce temps personne » n'a résolu les problèmes, je publierai mes pro» pres solutions ».

Histoire du problème des isopérimètres.

Aussitôt que Jean Bernoulli eut reçu les différens écrits qui contenaient les solutions de son

problème de la *Brachystochrone*, il se crut en droit, et il ne manqua pas d'en dire son avis : il loua beaucoup Leibnitz, le marquis de l'Hôpital et Neuton. Il reconnut aussi que son frère avait bien résolu le problème; mais il l'accusa d'y avoir mis trop de temps : il oubliait sans doute que dans ce même espace de quatre ou cinq mois, Jacques Bernoulli avait de plus conçu la théorie générale, et exécuté les calculs du grand problème des isopérimètres qu'il proposait, et dont il tenait la solution toute prête à paraître. Ensuite, passant aux nouveaux problèmes qu'on lui proposait à lui-même, et croyant que sa théorie de la Brachystochrone suffisait seule pour les résoudre, Jean Bernoulli laissa échapper ces expressions d'une vanité bien naïve : « Quelque difficiles que ces pro- » blèmes paraissent, je n'ai pas manqué de m'y at- » tacher à l'instant même que je les ai reçus; mais » voyez avec quel succès ! au lieu de trois mois » que l'on me donne pour sonder le gué, et au lieu » de tout le reste de cette année pour trouver la » solution, je n'ai employé, en tout, que trois mi- » nutes de temps pour tenter, commencer et ache- » ver d'approfondir tout le mystère ». Ces belles promesses étaient accompagnées de constructions qu'il donnait des problèmes, et de la demande qu'il faisait en conséquence, qu'on lui délivrât l'argent du prix, voulant, disait-il, le donner aux pauvres,

puisque d'ailleurs il lui avait trop peu coûté à gagner. Mais l'affaire n'était pas, à beaucoup près, aussi avancée qu'il le croyait; et sans doute il se fût épargné toute cette jactance, s'il eût prévu qu'elle allait lui attirer des chagrins d'autant plus amers, qu'à un talent supérieur pour la géométrie, il joignait la franchise ou la maladresse de montrer un peu trop ouvertement l'opinion avantageuse qu'il en avait lui-même.

Sa construction du problème de la cycloïde de la plus vite descente était exacte. On voit aussi qu'il avait rencontré fortuitement la vraie solution ou plutôt le vrai résultat d'un cas des isopérimètres; mais sa méthode ne s'étendait pas au problème général; et Jacques Bernoulli, bien sûr de la sienne propre, trouvant que les deux méthodes ne donnaient pas la même équation, lorsque les ordonnées de la seconde courbe sont des fonctions
An 1698. des ARCS de la première, fit imprimer un *Avis* où il affirmait que la méthode de son frère était défectueuse : il accordait encore quelque temps aux géomètres pour chercher une solution exacte et générale; et si personne ne la donnait, il s'engageait à trois choses : 1.° à deviner au juste l'analyse de son frère; 2.° quelle qu'elle fût, à y faire voir des paralogismes; 3.° à donner la véritable solution du problème dans toutes ses parties. A quoi il ajouta ce pari d'une espèce piquante, que si

quelqu'un s'intéressait assez au progrès des sciences pour hasarder un prix pour chacun de ces articles, il s'engageait à perdre autant, s'il ne s'acquittait pas du premier; à perdre le double, s'il ne réussissait pas au second; et le triple, s'il manquait au troisième.

La singularité de cet avertissement et l'autorité de l'auteur en géométrie, ébranlèrent un peu la confiance que Jean Bernoulli avait en sa méthode : il revit sa solution; il reconnut qu'il s'était trompé en quelque chose, ce qu'il attribuait *à une trop grande précipitation*. Il envoya un nouveau résultat; mais sans prendre un ton plus modeste, et demandant toujours le prix proposé par le NON NEMO.

A ces prétentions, Jacques Bernoulli répondit laconiquement : « Je prie mon frère de repasser » tout de nouveau sur sa dernière solution, d'en » examiner attentivement tous les points, et de » nous dire ensuite si tout va bien, lui déclarant » qu'après que j'aurai donné la mienne, les prétex- » tes de précipitation ne seront plus écoutés. »

Jean Bernoulli, alors très-éloigné de soupçonner le vice radical de sa méthode, répliqua qu'il n'avait pas besoin de revoir sa seconde solution; qu'elle était bonne, et que *son temps serait mieux employé à faire de nouvelles découvertes.*

Dans le temps même où Jacques Bernoulli pu-

blia son premier *Avis*, il écrivit sur ce sujet une lettre à Varignon, laquelle devait être aussitôt insérée dans le Journal des Savans. J'ignore pourquoi on différa de la faire paraître : elle ne vit le jour que quatre mois après la seconde solution de Jean Bernoulli; seulement les journalistes eurent le soin d'avertir que cette seconde solution n'avait pas fait changer d'opinion à l'auteur de la lettre. Elle avait pour objet de satisfaire aux deux premières conditions que Jacques Bernoulli s'était imposées, c'est-à-dire, de deviner la méthode de son frère, et de montrer en quoi elle péchait; il y exposait une analyse défectueuse en elle-même, où néanmoins des faussetés redressées par d'autres faussetés, conduisaient en certains cas à un résultat vrai; et au moyen de cette analyse, il trouvait les équations de son frère, d'où il conjecturait que selon toutes les apparences elles en étaient émanées.

A cette lettre, Jacques Bernoulli joignit un *Avis* récemment composé à l'occasion de la seconde solution de son frère, et dans lequel l'air triomphant dont Jean Bernoulli avait annoncé ses solutions, le refus qu'il faisait de revoir la dernière, et le prétexte de ce refus, sont tournés en ridicule avec un sel et une sorte de légèreté qu'on n'attend guère des géomètres, et qu'on est d'autant plus surpris de trouver ici, que Jacques Bernoulli, Suisse de nation et d'habitation, emploie la langue

française : « Je n'ai jamais cru, dit-il, que mon » frère possédât la véritable solution pour le pro- » blème des isopérimètres.... J'en doute plus que » jamais, vu la difficulté qu'il fait de repasser sur » ses solutions. S'il n'a employé *que trois minutes*, » comme il dit, *pour tenter, commencer et ache-* » *ver d'approfondir tout le mystère*, il y a appa- » rence que la revue ne lui en coûtera pas davan- » tage : d'ailleurs quand il en mettrait le double, » est-ce que *six minutes* employées à cet examen » diminueraient tant le nombre de ses nouvelles » découvertes »?

Lorsque Jean Bernoulli reçut le journal où ces pièces étaient insérées, il entra dans une fureur qu'on ne peut se représenter : elle s'exhala en un torrent d'injures grossières et dépourvues de sel contre son frère. Les journalistes eurent la trop facile complaisance de les imprimer. Oublions-les en faveur du génie de l'auteur pour les sciences.

Il n'y avait plus d'autre moyen de terminer la dispute, que de publier de part et d'autre les méthodes, et de les soumettre au jugement des plus habiles géomètres de l'Europe. Jean Bernoulli demandait Leibnitz pour arbitre ; il lui avait envoyé ses solutions, et Leibnitz, qui sans doute ne les avait pas examinées avec assez d'attention, les avait approuvées. De son côté, Jacques Bernoulli consentit que non-seulement Leibnitz fût pris pour

juge, mais qu'on lui adjoignît encore Neuton, le marquis de l'Hôpital, et tous les autres excellens géomètres du temps, pourvu qu'on lui laissât toute liberté de parler, et de mettre la vérité dans tout son jour.

Les choses demeurèrent en cet état pendant environ deux années. En 1700, Jacques Bernoulli fit imprimer à Bâle une lettre adressée à son frère, dans laquelle il l'invite avec une grande modération, où l'on sent néanmoins un peu le ton de la supériorité, à publier sa méthode : il donne lui-même, sans démonstrations, les formules du problème. Ces formules furent aussi insérées dans les actes de Leipsick *. Alors Jean Bernoulli vit en quoi il différait de son frère quant aux résultats : mais n'y découvrant point le principe de la véritable solution, et toujours persuadé que sa méthode était exacte, il la développa dans un mémoire qui fut envoyé sous cachet à l'académie des sciences de Paris, dans le courant de février 1701, et qui ne de-

* Les journalistes supprimèrent le commencement de la lettre et le *post-scriptum* qui la termine. Ces deux morceaux, intéressans pour les géomètres, ont été également exclus, par l'influence de Jean Bernoulli, de l'édition des œuvres de Jacques Bernoulli, donnée en 1744. J'ai fait réimprimer le tout dans le *Journal de physique*, pour le mois de septembre 1792.

vait être ouvert, avec son consentement, qu'après que Jacques Bernoulli aurait fait paraître son analyse.

Instruit de cet envoi, Jacques Bernoulli n'avait plus de raison de tenir sa méthode cachée : il l'exposa donc, et la fit soutenir en forme de thèse à Bâle, au mois de mars 1701, avec une dédicace aux quatre illustres géomètres, l'Hôpital, Leibnitz, Neuton et Fatio de Duillier. Il la fit de plus imprimer séparément à Bâle et dans les actes de Leipsick, pour le mois de mai 1701, sous ce titre : *Analysis magni problematis isoperimetrici.* Elle fut regardée comme un prodige d'invention et de sagacité : on peut assurer en effet qu'eu égard au temps, on n'a jamais résolu de problème plus difficile. Le marquis de l'Hôpital écrivit à Leibnitz qu'il l'avait lue avec avidité, et qu'il l'avait trouvée très-directe et très-exacte : témoignage que Leibnitz transmit à Jean Bernoulli lui-même, quoiqu'il fût d'ailleurs très-prévenu en sa faveur.

Leib. et Joh. Bern. com. Epist. t. II, pag. 48.

On avait lieu d'attendre qu'après tant d'éclats, Jean Bernoulli combattrait les solutions de son frère, ou qu'il en reconnaîtrait publiquement la justesse; mais dès ce moment il garde un profond silence; point d'observations, point de critiques de sa part; au lieu de mettre sa méthode en opposition avec celle de son rival, il la laisse dormir paisiblement pendant cinq ans au dépôt de l'acadé-

mie; enfin, Jacques Bernoulli meurt en 1705, et bientôt après cette méthode paraît parmi les mémoires de l'académie pour l'année 1706. Que faut-il penser de cette étrange conduite de Jean Bernoulli? Supposera-t-on, contre toute apparence, que cet homme si ardent, si impétueux, ait voulu laisser tomber une dispute dont il était fatigué? N'est-il pas beaucoup plus vraisemblable que soupçonnant quelque vice dans sa méthode, il craignit de la soumettre au jugement de son frère; mais que ce frère mort, la honte de paraître vaincu aux yeux de toute l'Europe, le détermina à publier le mémoire envoyé en 1701, dans l'espérance que personne n'approfondirait assez la question pour prononcer entre les deux méthodes, et qu'au moins il passerait dans l'opinion de quelques savans pour avoir aussi résolu le problème? Cette conjecture acquerra une nouvelle force, si l'on se rappelle qu'en effet Fontenelle, dans l'éloge de Jacques Bernoulli, et quarante-trois ans après Fouchi, dans celui de Jean Bernoulli, ont parlé de leurs solutions, comme si elles étaient également exactes, également générales.

Les profonds géomètres portèrent un jugement très-différent : les palmes de la victoire furent décernées aux méthodes de Jacques Bernoulli. Malgré tous les moyens que Jean Bernoulli avait employés, et par lesquels il était d'abord parvenu à don-

ner l'apparence de la vérité à sa méthode, elle était réellement défectueuse, comme son frère l'avait toujours soutenu : l'erreur radicale venait de ce que Jean Bernoulli ne considérait que deux élémens de la courbe, au lieu qu'il en fallait considérer trois, ou employer une condition équivalente. Dans les problèmes du même genre que celui de la plus vite descente, où il s'agit simplement de remplir la condition du *maximum* ou du *minimum*, il suffit d'appliquer cette condition à deux élémens, pour trouver l'équation différentielle de la courbe : mais lorsqu'outre le *maximum* ou le *minimum* il faut que la courbe ait encore une propriété, comme d'être isopérimètre à une autre, cette nouvelle condition exige qu'un troisième élément de la courbe ait une certaine inclinaison par rapport aux deux autres; et toute détermination fondée uniquement sur la première considération, donnera des résultats faux, excepté les cas où une courbe ne peut satisfaire à l'une des deux conditions, sans satisfaire en même temps à l'autre. Vainement Jean Bernoulli croyait remplir la condition de l'isopérimétrisme, sans déroger au *maximum* ou au *minimum*, en considérant deux élémens de la courbe comme deux petites lignes droites menées d'un point intermédiaire, aux deux foyers d'une ellipse infiniment petite : cette supposition n'introduisait pas une nouvelle condition

dans le calcul; elle n'avait d'autre effet que de rendre constante ou variable la différentielle de l'abscisse. Jacques Bernoulli avait employé explicitement trois élémens de la courbe; et par-là il était parvenu à des solutions exactes, générales et complètes.

Mém. de l'ac. 1718.

Cette considération des trois élémens était alors tellement essentielle, qu'enfin Jean Bernoulli, plus de treize ans après la mort de son frère, en fit la base d'une nouvelle solution, avouant qu'il s'était trompé dans la première : aveu tardif, mais qui du moins eût honoré l'auteur, s'il eût de plus reconnu que sa nouvelle solution n'était autre chose dans le fond que celle de son frère, présentée sous une forme qui abrège beaucoup le calcul, et s'il n'eût pas cherché à relever, avec une sorte d'affectation, quelques inutilités qui se trouvent dans celle-ci, mais qui n'en altèrent point l'exactitude et la généralité.

Pendant la chaleur de la dispute, Jean Bernoulli tenta plusieurs fois d'y faire diversion, en proposant à son frère des problèmes qui n'y avaient qu'un rapport éloigné, mais bien choisis pour la difficulté. Je n'en citerai qu'un seul : il consistait à *déterminer, parmi toutes les demi-ellipses qu'on pouvait décrire dans un même plan vertical, et sur un même axe horizontal donné, celle qui était parcourue dans le moindre temps*

possible, par un corps grave dont le mouvement commençait à l'une des extrémités de l'axe donné. Jacques Bernoulli résolut ce problème, ainsi que les autres, comme on peut le voir dans le recueil de ses œuvres, page 1017. Mais il ne publia dans le temps ses solutions que sous des anagrammes dont on trouve la clef dans ses œuvres posthumes : il voulait éviter tout écart, toute discussion étrangère, avant que le procès du problème isopérimètre fût terminé.

J'ai cru devoir raconter de suite l'histoire de ce problème. Avant de la quitter, je ne puis m'empêcher encore de marquer mon étonnement de ce qu'aucun autre géomètre du temps n'ait entrepris, au moins publiquement, de s'exercer sur un si beau sujet; car, quoique Jacques Bernoulli eût provoqué son frère en particulier, tout le monde avait droit de se montrer dans la lice; et les questions proposées avaient tous les avantages capables d'aiguillonner les géomètres : grandes difficultés à vaincre, nouvelle extension de la plus profonde géométrie. Nous verrons plus loin les progrès que cette théorie a faits dans le siècle passé.

SECTION IV.

Solutions de divers problèmes. Leibnitz invente la méthode pour différencier de curvâ in curvam. *Justification du marquis de l'Hôpital. Ouvrages de Neuton. Notices sur quelques autres géomètres.*

LA dispute dont je viens de rendre compte m'a fait un peu anticiper sur l'ordre des temps, et m'a forcé de laisser en arrière plusieurs problèmes intéressans et remarquables sur lesquels je reviens.

I.

En proposant le problème des isopérimètres, Jacques Bernoulli y avait joint celui de la cycloïde
An 1697. de la plus vite descente à une ligne donnée de position, pour compléter en quelque sorte la théorie de la Brachistochrone. Il démontra que la cycloïde cherchée est celle qui coupe à angles droits la ligne donnée de position; et il apprit en général à trouver parmi les courbes semblables qui se terminent à une ligne donnée de position, celle qui jouit de quelque propriété de *maximum* ou de *minimum*. De son côté, Jean Bernoulli était parvenu à de semblables résultats, par une méthode un peu détournée, mais très-ingénieuse, et qui

donna lieu à une insigne extension de l'analyse infinétisimale. Il employa dans cette recherche la considération de la courbe *synchrone*, ou d'une courbe qui coupe une suite de courbes semblables et semblablement posées, de telle manière que les arcs de ces dernières courbes, compris entre un point donné et la synchrone, sont parcourus en temps égaux par un corps pesant : il démontra que parmi toutes les cycloïdes ainsi coupées, celle qui l'est perpendiculairement, est parcourue en moins de temps qu'aucune autre pareillement terminée à la synchrone. La question n'était donc plus que de savoir mener, sous une direction donnée, une tangente à la synchrone des cycloïdes ; et pour résoudre le problème en général, il ne fallait pas qu'ici la solution fût dépendante uniquement des propriétés de la cycloïde, mais de principes applicables à toute autre suite de courbes semblables et semblablement posées. Jean Bernoulli détermina, par une construction géométrique, la synchrone correspondante à la cycloïde du temps le plus court ; mais il ne put parvenir à trouver l'expression analytique de la sous-tangente des synchrones pour toutes sortes de courbes semblables. Ayant long-temps cherché en vain la solution de ce problème, il le proposa à Leibnitz, qui le résolut très-promptement, et qui inventa à ce sujet la célèbre méthode de différencier *de curvá in curvam*.

Leib. et Job. Ber. Com. Epist. tom. 1, pag. 19.

A la réception de la lettre qui contenait cette méthode, Jean Bernoulli fut transporté de joie et d'admiration : il se plaignit amicalement de ce que *le dieu de la géométrie avait admis Leibnitz plus avant que lui dans son sanctuaire.* Ce premier mouvement fut celui de la justice : on voit avec peine que dans la suite, et après la mort de Leibnitz, Jean Bernoulli ait cherché à se faire regarder comme le co-inventeur de cette méthode, quoiqu'il n'ait réellement que le mérite d'en avoir fait de très-belles applications, comme on peut le voir dans le tome II de ses œuvres. Leibnitz ne l'a jamais publiée lui-même ; elle n'a paru pour la première fois, sous son nom, qu'en 1745, dans le recueil de sa correspondance avec Jean Bernoulli.

On voit, par les œuvres posthumes de Jacques Bernoulli, qu'il avait aussi trouvé de son côté une méthode à peu près semblable.

II.

Ans 1699, 1700, 1701, etc.

Une foule innombrable d'autres recherches curieuses et difficiles occupait alors les géomètres : c'étaient la quadrature de certains espaces cycloïdaux ; la section indéfinie des arcs circulaires, c'est-à-dire la méthode de trouver l'expression générale de la corde d'un arc multiple ou sous-multiple d'un arc donné, dans un rapport donné quelconque ; la courbe d'égale pression ; la transforma-

tion de courbes en d'autres de même longueur; de nouvelles méthodes d'approximation pour les quadrations et les rectifications des courbes; la manière de trouver certaines courbes par les relations données de leurs branches, etc. On voyait continuellement paraître sur la scène Leibnitz, les frères Bernoulli, le marquis de l'Hôpital, etc. Toutes ces recherches n'avaient pas le même degré d'utilité; mais toutes ont contribué plus ou moins au progrès de la géométrie. Je ne finirais point, si je cherchais à les faire connaître avec quelque détail : je m'arrêterai seulement un peu sur un écrit de Jean Bernoulli, parce qu'il attaque la mémoire d'un illustre Français, que je dois défendre autant qu'il est en mon pouvoir.

III.

Justification du marquis de l'Hôpital.

Le marquis de l'Hôpital avait exposé dans le livre *des infiniment petits,* une règle très-ingénieuse pour trouver la valeur d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent en même temps, lorsqu'on donne à la variable qui y entre une certaine valeur déterminée. Personne ne s'était avisé de lui en disputer la propriété tant qu'il vécut. Un mois environ après sa mort, Jean Bernoulli ayant remarqué que cette règle était incomplète, y fit une addition nécessaire, et prit de là occasion de s'en déclarer l'auteur. Plusieurs

amis du marquis de l'Hôpital se plaignirent hautement et avec chaleur d'une réclamation qui aurait dû être faite plutôt, si elle avait quelque fondement. Mais au lieu de rétracter son assertion, Jean Bernoulli alla bien plus loin : il en vint par degrés jusqu'à revendiquer tout ce qu'il y a de plus important dans l'Analyse des infiniment petits. Qu'on me permette d'examiner un peu sa prétention.

En 1692, Jean Bernoulli était venu à Paris : il y fut accueilli avec distinction par le marquis de l'Hôpital, qui l'emmena peu de temps après dans sa terre d'Ourques en Touraine, où ils passèrent quatre mois entiers à étudier ensemble la nouvelle géométrie. Toutes les attentions, toutes les marques solides de reconnaissance furent prodiguées au savant étranger. Bientôt le marquis de l'Hôpital, par un travail opiniâtre et forcé qui altéra pour jamais sa santé, se trouva en état de résoudre les grands problèmes que les géomètres se proposaient. Dès l'année 1693, il paraît dans cette savante lice, et s'y distingue jusqu'à sa mort. On le comptait en ce temps-là au premier rang des géomètres de l'Europe, et on observe en particulier que Jean Bernoulli était l'un de ses plus ardens panégyristes. Peut-être l'éleva-t-on trop haut pendant qu'il vivait ; mais l'accusation que Jean Bernoulli intente contre lui quand il est mort, forme un contre-poids trop pesant, et la justice doit réta-

blir l'équilibre. Or, je le demande avec assurance, est-il vraisemblable qu'un géomètre qui, avant la publication du livre des infiniment petits, avait donné tant de preuves d'un profond savoir, qui avait, par exemple, résolu le problème de la courbe d'équilibration dans les ponts-levis, n'ait été qu'un simple rédacteur dans toutes les parties difficiles de cet ouvrage ? Peut-on présumer qu'il ait eu assez peu de délicatesse pour demander ou accepter tant de secours humilians? Ne sait-on pas d'ailleurs qu'il avait l'âme très-élevée? Les fragmens de lettres produits par Jean Bernoulli, ne prouvent pas à beaucoup près ce qu'il avance : on y trouve bien, à la vérité, que Jean Bernoulli avait composé des leçons de géométrie pour le marquis de l'Hôpital, mais non pas que ces leçons soient le livre des infiniment petits; l'élève, homme de génie, était devenu maître, et volait de ses propres ailes. On voit encore dans ces fragmens, que le marquis de l'Hôpital, pendant qu'il travaillait à son livre, demandait, avec la confiance de l'amitié, des éclaircissemens à Jean Bernoulli sur certaines questions qui y sont traitées; mais nous n'avons pas les réponses de Jean Bernoulli; nous ne savons pas s'il a donné ces éclaircissemens, ou si le marquis de l'Hôpital, en y réfléchissant davantage, ne les a pas enfin trouvés. Dans toutes ces incertitudes, le parti le plus sage et le plus juste est de nous

Ac. Lips. 1721.

en tenir à la déclaration générale que fait le marquis de l'Hôpital dans sa préface, de *devoir beaucoup aux lumières* de Jean Bernoulli, et de penser que s'il lui avait eu des obligations d'une nature particulière, il n'aurait pas osé les envelopper dans les expressions d'une reconnaissance vague et générale, en présence de toute l'Europe et de Jean Bernoulli en particulier. Si, malgré toutes ces raisons, on veut croire Jean Bernoulli sur sa parole, quand il se donne pour l'auteur du livre des infiniment petits, la morale au moins ne l'absoudra jamais d'avoir troublé la cendre d'un bienfaiteur généreux, pour un misérable intérêt d'amour-propre, d'autant plus déplacé, que Jean Bernoulli était d'ailleurs fort riche par lui-même. Du reste, cet exemple doit être une grande leçon pour les hommes ambitieux qui veulent courir trop vite à la réputation : il les avertit de repousser les services empressés, offerts souvent plutôt par la vanité que par la bienveillance, et de se bien persuader qu'on n'arrive jamais à la véritable et solide gloire que par ses propres travaux.

IV.

Si la sévérité de l'histoire oblige quelquefois de relever les faiblesses des grands hommes, elle impose encore plus strictement le devoir de leur payer le tribut de louanges qu'ils méritent. Dans

cet esprit, je me hâte de citer une extension remarquable que Jean Bernoulli donna environ dans ce temps-là au calcul intégral.

Il enseigna les premiers principes de la méthode pour intégrer les fonctions rationnelles ; et à cette occasion il fit la remarque, devenue si féconde dans la suite, que les arcs de cercle pouvaient être représentés par des logarithmes imaginaires. Lui-même porta par degrés la théorie des fractions rationnelles à sa perfection ; principalement au sujet d'un problème qui lui fut proposé par les géomètres anglais, dans la petite guerre qu'il eut avec eux, comme on le verra ci-dessous. Académie de Paris. An 1702.

V.

Depuis le livre des *Principes*, les Anglais n'avaient fait paraître aucune découverte un peu importante dans la géométrie, si ce n'est la solution du problème de la brachistochrone. Sur la fin de l'année 1704, Neuton publia, dans un même volume, ses leçons d'*Optique* en anglais, une énumération *des lignes du troisième ordre* en latin, et le traité des *Quadratures* des courbes, pareillement en latin. Les leçons d'Optique sont étrangères ici. L'énumération des lignes du troisième ordre est un ouvrage original et profond, quoique simplement fondé sur l'analyse ordinaire et sur la théorie des suites que Neuton avait poussée très- Travaux des Anglais dans la géométrie.

loin; il ne contient, pour ainsi dire, que des énoncés et des résultats; il a été commenté dans la suite par plusieurs savans géomètres, auxquels il a fourni une ample moisson de recherches très-curieuses. Le traité des quadratures appartient à la nouvelle géométrie.

Ce traité a pour objet spécial l'intégration des formules différentielles du premier ordre à une seule variable : d'où dépend la quadrature des courbes, ou exacte, ou du moins approchée. Neuton forme, avec beaucoup d'adresse, des séries, au moyen desquelles il rappelle l'intégration de certaines formules compliquées à celle d'autres formules plus simples; et ces séries venant à s'interrompre en certains cas, donnent alors les intégrales en termes finis. Le développement de cette théorie offre une longue chaîne de très-belles propositions, où l'on remarque, entr'autres problèmes curieux, la méthode pour intégrer les fractions rationnelles; ce qui était alors difficile, surtout lorsque les racines sont égales. Un commencement si heureux, si important, fait regretter que l'auteur n'ait donné que les premiers principes de l'analyse des équations différentielles. Il enseigne bien, à la vérité, à prendre les fluxions d'un ordre quelconque d'une équation à un nombre quelconque de variables; ce qui appartient au calcul différentiel : mais il n'apprend point à résoudre le problème in-

verse, c'est-à-dire qu'il n'a indiqué aucun moyen d'intégrer les équations différentielles, soit immédiatement, soit par la séparation des indéterminées, soit par la réduction en séries, etc. Cependant, cette théorie avait déjà fait alors des progrès très-considérables en Allemagne, en Hollande et en France, comme on en peut juger par les problèmes de la chaînette, des courbes isochrones, de la courbe élastique, et principalement par la solution que Jacques Bernoulli avait donnée du problème des isopérimètres. Les adversaires de Neuton ont pris acte de ce traité des quadratures, pour affirmer qu'à l'époque où cet ouvrage parut, l'auteur ne connaissait parfaitement, du calcul intégral, que la partie des quadratures, et non celle de l'intégration des équations différentielles.

Neuton a fondu presqu'entièrement le traité *des Quadratures* dans un autre intitulé : *Méthode des fluxions et des suites infinies*. Celui-ci ne contient que les simples élémens de la géométrie infinitésimale, c'est-à-dire les méthodes pour déterminer les tangentes des lignes courbes, les *maxima* et les *minima* ordinaires, les longueurs des courbes, les espaces qu'elles renferment, quelques problèmes faciles sur l'intégration des équations différentielles, etc. L'intention de l'auteur avait été plusieurs fois de le faire imprimer ; mais il en fut oujours détourné par diverses raisons, dont la prin-

cipale, sans doute, fut que cet ouvrage ne pouvait rien ajouter à sa gloire, ni même contribuer à l'avancement de la profonde géométrie. Le docteur Colson le fit paraître en anglais en 1736, neuf ans après la mort de Neuton.

En 1740, Buffon le traduisit en français, et mit à la tête une préface où Leibnitz est rabaissé avec un excès, un ton décisif, qui pourraient en imposer à quelques lecteurs, si la critique ne se réfutait d'elle-même par les erreurs dont elle fourmille. Malgré des efforts publics, souvent réitérés, Buffon n'a jamais pu pénétrer un peu avant dans la haute géométrie : on se rappelle encore l'anecdote sur le sens étrange qu'il avait donné à ces mots latins *de testudine quadrabili*, de Viviani, d'où il avait déduit une petite dissertation qu'un de ses amis lui fit heureusement retrancher de cette même préface. La postérité ne le connaît plus que par son *Histoire naturelle*, où les philosophes, en condamnant quelques écarts de l'imagination, ne peuvent s'empêcher d'admirer plusieurs idées grandes et vraies, ainsi que la pompe et l'élégance du style.

VI.

Il parut, en 1711, un autre ouvrage de Neuton, sa *Méthode différentielle*, qu'il avait déjà présentée sous une forme un peu différente, dans son livre des *Principes*. L'objet de cette méthode est de

faire trouver les coefficiens linéaires d'une équation qui satisfait à autant de conditions qu'il y a de coefficiens, ou de construire une courbe du genre parabolique, qui passe par un nombre quelconque de points donnés. Il en résulte un moyen facile et commode de carrer par approximation les courbes dont on peut déterminer un certain nombre d'ordonnées. Au surplus, Neuton n'a employé dans cet ouvrage, que la simple algèbre ordinaire, et c'est à tort que quelques-uns de ses admirateurs, un peu trop zélés, ont cru y trouver les premiers élémens du calcul intégral aux différences finies, si célèbre de nos jours.

VII.

L'Italie fit des progrès considérables dans la nouvelle géométrie, au commencement du siècle passé : elle en fut principalement redevable à l'ouvrage que Gabriel Manfredi publia en 1707, sous ce titre : *De constructione Æquationum differentialium primi gradûs ;* ouvrage où l'auteur fait remarquer beaucoup d'adresse pour assujétir certaines équations différentielles aux conditions qui les rendent intégrables. Il s'est rencontré par la conformité du génie et de la doctrine avec Jean Bernoulli, sur la méthode de séparer les indéterminées dans les équations différentielles homogènes du premier ordre.

Travaux de quelques autres nations.

MANFREDI, né en 1681, mort en 1761.

VIII.

La ville de Bâle, où Jacques Bernoulli était professeur de mathématiques, eut le malheur de perdre, en 1705, cet homme illustre, dans la force de son âge et de son talent : elle chercha à s'en consoler, en appelant aussitôt, pour le remplacer, Jean Bernoulli, son frère et son digne rival.

Parmi le grand nombre d'excellens élèves que Jacques Bernoulli avait formés, on remarque principalement son compatriote Jacques *Herman*, et son neveu Nicolas *Bernoulli*, dont le père exerçait le commerce à Bâle, avec honneur et avantage.

HERMAN, né en 1678, mort en 1733.

Herman se fit connaître d'abord par une méthode de trouver les rayons osculateurs dans les courbes polaires; il publia, peu de temps après, une belle solution du problème *de la section indéfinie des arcs circulaires*, agité alors entre les frères Bernoulli. Il se distingua encore plus dans la suite par divers ouvrages dont j'aurai occasion de parler.

NICOLAS BERNOULLI, né en 1683, mort en 1759.

Nicolas Bernoulli se rendit célèbre de très-bonne heure dans *l'art de conjecturer*, en marchant sur les traces de son oncle Jacques Bernoulli, dont on connaît l'excellent ouvrage intitulé : *Ars conjectandi*. En 1709, Nicolas Bernoulli fit une importante application des principes de cet ouvrage aux probabilités de la durée de la vie humaine. On lui doit plusieurs autres recherches d'une profonde

géométrie, qui nous remarquerons expressément quand il sera question des sujets auxquels elles se rapportent.

IX.

En France, le marquis de l'Hôpital n'eut point de contemporains, ni de successeurs immédiats de sa force en géométrie. Nous possédions cependant alors plusieurs savans géomètres qui, sans avoir reculé, au moins d'une manière marquée, les bornes de la science, ont surmonté des difficultés attachées alors aux méthodes d'application : les principaux sont Parent, Varignon et Saurin.

On doit à Parent la solution d'un très-beau et très-utile problème *de maximis et minimis*. Ayant remarqué, en général, que si, dans une machine, la disposition des parties est telle que la vitesse du poids *moteur* devienne plus grande ou plus petite, selon qu'au contraire celle du poids *mu* devient plus petite ou plus grande, il existe un rapport entre les deux vitesses, pour que l'effet de la machine soit un *maximum* ou un *minimum*; il démontra que le *maximum* d'effet a lieu dans les roues hydrauliques, mues par le choc de l'eau, lorsque la vitesse de la roue est le tiers de la vitesse du courant. On trouve plusieurs autres idées très-ingénieuses dans ses nombreux écrits; mais, en général, il avait le défaut d'être obscur, ce qui a beau-

PARENT, né en 1666, mort en 1716.

Mém. de l'Ac. 1704.

coup nui à sa réputation. Il convenait lui-même de ce défaut. Le célèbre Fontenelle, que j'ai eu l'honneur de connaître dans les dernières années de sa vie, et dont je me rappelle les bontés avec attendrissement, me racontait un jour qu'ayant fait, en sa qualité de secrétaire de l'académie des sciences, l'extrait d'un mémoire de Parent, celui-ci fut étonné de s'y trouver si clair, et l'en remercia par ces paroles : *Domine, illuminasti tenebras meas.* Le P. Malebranche peignait l'obscurité de ce même géomètre, d'une manière fort ingénieuse : *Monsieur Parent*, disait-il, *a beaucoup d'esprit, mais il n'en a pas la clef.*

Varignon, né en 1654, mort en 1722. Varignon a joui d'une fort grande célébrité : il la devait à sa place de professeur de mathématiques au collége Mazarin, et au mérite qu'il avait d'exposer clairement ses idées, quoique son style fût d'ailleurs incorrect, lâche et diffus. Il était foncièrement dépourvu de génie; on ne lui voit résoudre aucun grand problème du temps; mais il était doué d'une excellente mémoire, lisait beaucoup, tournait et retournait les écrits des inventeurs, généralisait leurs méthodes, s'appropriait leurs idées; et quelques élèves prenaient des réminiscences déguisées ou amplifiées, pour des découvertes. Il a publié à part un traité de *Mécanique générale*, où il applique avec clarté et exactitude le principe du parallélogramme des forces aux lois de l'équili-

bre. Les mémoires de l'académie des sciences de Paris sont remplis de ses calculs dans toutes sortes de genres. On lui a principalement l'obligation d'avoir éclairci plusieurs endroits du livre des *Principes mathématiques* : de notre temps, il aurait commenté Euler et d'Alembert.

Saurin n'a pas, à beaucoup près, autant écrit que Varignon, mais il avait une trempe d'esprit bien plus forte et plus approchante du véritable génie de l'invention. On juge même par le peu d'ouvrages mathématiques qui nous restent de lui, que s'il eût commencé à étudier la géométrie de meilleure heure, et s'il se fût appliqué à un genre particulier, il se serait élevé au premier rang. Il a donné une très-belle solution générale du problème, où parmi une infinité de courbes semblables, décrites dans un même plan vertical, et ayant un même axe et un même point d'origine, il s'agit de déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine, et une ligne droite ou courbe donnée de position, est parcouru dans le plus court temps possible. Il est le premier qui ait pleinement éclairci la théorie des tangentes aux points multiples des courbes. Ses connaissances dans toutes les parties théoriques et pratiques de l'horlogerie étaient très-profondes : la preuve en est dans deux mémoires qu'il a donnés sur ce sujet à l'académie des sciences.

SAURIN, né en 1659, mort en 1737.

Mém. de l'Ac. 1709.

Acad. de Paris, 1716, 1723, 1727.

Acad. de Paris, 1720, 1722.

Tous ces savans, et plusieurs autres d'un ordre

inférieur, concouraient au progrès de la méthode des infiniment petits. Une guerre sourde, qui fermentait depuis plusieurs années, et qui éclata enfin avec violence en 1711, au sujet du droit à la première invention de cette méthode, fit craindre d'abord qu'on ne perdît en discussions polémiques un temps qui devait être employé à la perfectionner; mais ces discussions même finirent par tourner au profit de la science. Cette querelle a fait trop de bruit; elle est encore aujourd'hui un trop grand objet d'intérêt et de curiosité, pour que je puisse me dispenser de la rapporter : je tâcherai de traiter et d'éclaircir la question avec plus de soin qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

SECTION V.

Examen des droits de Leibnitz et de Neuton à l'invention de l'Analyse infinitésimale.

Les productions du génie étant des biens d'un ordre infiniment supérieur à tous les autres objets de l'ambition humaine, on ne doit pas être surpris de la chaleur avec laquelle Leibnitz et Neuton se sont disputé la découverte de la nouvelle géométrie. Ces deux illustres rivaux, ou plutôt l'Allema-

gne et l'Angleterre, combattaient en quelque sorte pour l'empire des sciences.

La première étincelle de la guerre fut excitée par Nicolas Fatio de Duillier, génevois, retiré en Angleterre, le même qui dans la suite donna un étrange spectacle de démence, en voulant ressusciter publiquement un mort dans l'église de Saint-Paul de Londres; mais qui avait alors la tête saine, et même de la réputation parmi les géomètres. Poussé d'un côté par les Anglais, de l'autre par un ressentiment personnel contre Leibnitz, dont il prétendait n'avoir pas reçu les marques d'estime qui lui étaient dues, il s'avisa de dire dans un petit écrit sur *la courbe de la plus vite descente*, et sur *le solide de la moindre résistance*, qui parut en 1699, que Neuton était le *premier inventeur* des nouveaux calculs; qu'il parlait ainsi pour l'honneur de la vérité et l'acquit de sa conscience, et qu'il laissait à d'autres le soin de décider ce que Leibnitz, *second inventeur*, avait emprunté du géomètre anglais. Leibnitz, justement blessé de cette antériorité d'invention qu'on attribuait à Neuton, et de la maligne conséquence qu'on insinuait, répondit avec beaucoup de modération que Fatio parlait sans doute de son chef; qu'il ne pouvait penser que Neuton l'approuvât; qu'il ne voulait point entrer en procès avec cet homme célèbre, pour qui il avait et montrait dans toutes les occa-

sions une vénération profonde; que lorsqu'ils s'étaient rencontrés dans quelques inventions géométriques, Neuton lui-même avait déclaré dans son livre *des Principes*, qu'ils ne tenaient rien l'un de l'autre; que lorsqu'il publia son calcul différentiel en 1684, il en était en possession depuis environ huit ans; que vers le même temps Neuton lui avait bien annoncé, sans aucune explication, qu'il savait mener les tangentes par une méthode générale qui n'était point arrêtée par les quantités irrationnelles; mais qu'il ne pouvait pas juger si cette méthode était le calcul différentiel, puisque Huguens, qui ne connaissait pas alors ce calcul, affirmait également qu'il en avait une, douée des mêmes avantages; que le premier ouvrage des Anglais, où le calcul différentiel fût expliqué d'une manière positive, était la préface de l'Algèbre de Wallis, publiée seulement en 1693; que sur toutes ces choses, il s'en rapportait entièrement au témoignage et à la candeur de Neuton, etc. L'assertion de Fatio, absolument dénuée de preuves, fut oubliée pendant plusieurs années.

En 1708, Keil, excité peut-être par Neuton, ou du moins certain de n'en être pas désavoué, renouvela la même accusation. Leibnitz observa que Keil, qu'il appelait d'ailleurs un homme *savant*, était trop *nouveau* pour porter un jugement assuré de choses arrivées depuis un grand nombre d'an-

nées; et il répéta ce qu'il avait déjà dit, qu'il s'en rapportait à la candeur et à la bonne foi de Neuton même. Keil revint à la charge; et dans une lettre adressée à Hansloane, secrétaire de la société royale de Londres, il ne se contenta plus de dire que Neuton était le premier inventeur, il fit entendre clairement que Leibnitz, après avoir puisé la méthode dans les écrits de Neuton, se l'était appropriée, en y appliquant seulement une annotation particulière : ce qui était, en d'autres termes, le taxer de plagiat. Leibnitz, indigné d'une pareille inculpation, en porta de vives plaintes à la société royale, et demanda hautement que l'on réprimât les *clameurs* d'un homme inconsidéré, qui attaquait sans raison et sans pudeur sa réputation et sa bonne foi. La société royale nomma des commissaires pour examiner tous les écrits qui regardaient cette question; et elle les publia en 1712, avec le rapport des commissaires, sous ce titre : *Commercium epistolicum de Analysi promotâ*. Sans être absolument affirmative, la conclusion du rapport est que Keil n'a pas calomnié Leibnitz. L'ouvrage fut répandu avec profusion dans toute l'Europe. An 1711.

Neuton était alors président de la société royale, où il jouissait de la plus haute considération, du pouvoir le plus étendu : peut-être devait-il par délicatesse faire instruire le procès à un autre tribu-

nal. Il est vrai que Fontenelle a dit dans l'éloge de Leibnitz, que *Neuton n'avait point paru, et qu'il s'était reposé de sa gloire sur des compatriotes assez vifs.* Mais il parlait ainsi après la mort de Leibnitz, et Neuton était vivant. Sans doute il avait été trompé par de faux mémoires : car dans le cours de la dispute, Neuton écrivit deux lettres très-amères contre Leibnitz, et dans lesquelles on remarque même avec quelque surprise un art un peu trop ingénieux, pour révoquer ou infirmer les témoignages de haute estime qu'il lui avait donnés autrefois en diverses occasions, et notamment dans le fameux *Scholie* qui accompagnait la proposition VII du second livre *des Principes.*

Il paraît que la société royale, en se hâtant de publier les pièces qui pouvaient être à la charge de Leibnitz, sans attendre celles qu'il promettait pour sa défense, sentit elle-même qu'on ne manquerait pas de l'accuser de partialité ou de précipitation ; car elle eut soin de déclarer bientôt après qu'elle n'avait point eu l'intention de juger le fond du procès, et qu'elle laissait à tout le monde la liberté de le discuter et d'en dire son avis. Je demande donc la permission de me livrer à cet examen : j'y apporterai toute l'attention dont je suis capable. Leibnitz et Neuton me sont indifférens; je n'ai reçu d'eux, si je puis employer une expression de Tacite, *ni bienfait, ni injure.* La subli-

mité de leur génie exige un profond hommage; mais on doit encore plus de respect à la vérité.

Mihi Galba, Otho, Vitellius, nec beneficio, nec injuriâ cogniti. Tac. Hist. Lib. I.

Neuton tenant de la nature une intelligence supérieure, et né dans un temps où Hariot, Wren, Wallis, Barrow, etc., avaient déjà rendu les mathématiques florissantes en Angleterre, eut de plus l'avantage de recevoir dans sa première jeunesse les leçons de Barrow à l'université de Cambridge. Toutes les forces de son génie se portèrent vers ce genre d'études; les succès qu'il y obtint furent prodigieux. Fontenelle lui a appliqué ce que Lucain a dit du Nil, *qu'il n'a pas été donné aux hommes de le voir faible et naisant.* On assure que dès l'âge de vingt-cinq ans il avait jeté les fondemens des grandes théories qui l'ont rendu depuis si fameux. Leibnitz, plus jeune de quatre ans, ne trouva en Allemagne que de médiocres secours pour son instruction; il se forma, pour ainsi dire, tout seul. Son génie vaste et dévorant, secondé par une mémoire extraordinaire, embrassait toutes les branches des connaissances humaines : littérature, histoire, poésie, droit des gens, sciences exactes, physique, etc. Cette multiplicité de goûts nuisit nécessairement à la rapidité de ses progrès dans chaque genre : il ne s'annonça donc comme un grand mathématicien que sept ou huit ans après Neuton.

Ces deux grands hommes possédaient l'un et l'autre la nouvelle analyse long-temps avant de la

mettre au jour. Si la priorité de la publication emportait la priorité de la découverte, Leibnitz aurait pleinement gain de cause; mais ce moyen n'est pas suffisant pour prononcer ici avec une entière assurance. L'inventeur peut s'être réservé long-temps à lui-même son secret; il peut en avoir laissé échapper quelques rayons qu'un autre aura saisis. Remontons donc à la source, s'il est possible, et tâchons de reconnaître l'être bienfaisant qui, comme le Prométhée de la fable, déroba le feu aux dieux pour en faire part aux hommes, suivant la belle comparaison de Fontenelle.

Le *Commercium epistolicum* contient d'abord, à dater de l'annéee 1669, plusieurs découvertes analytiques de Neuton. Dans la pièce intitulée: *De Analysi per æquationes numero terminorum infinitas*, outre la méthode pour résoudre les équations par approximation dont il ne s'agit pas ici, Neuton enseigne à carrer les courbes dont les ordonnées sont exprimées par des monômes, ou par des sommes de monômes; et lorsque les ordonnées renferment des radicaux complexes, il rappelle la question au premier cas, en développant l'ordonnée en une suite infinie de termes simples, au moyen de la formule du binôme; ce que personne n'avait fait encore. Sluze et Grégori avaient trouvé, chacun de leur côté, une méthode pour les tangentes. Neuton, dans une lettre à Collins, en date

du 10 décembre 1672, prouve qu'il en avait aussi trouvé une : il l'applique à un exemple, sans y ajouter la démonstration; il dit ensuite qu'elle n'est qu'un corollaire d'une autre méthode générale qu'il a pour mener les tangentes, carrer les courbes, trouver leurs longueurs et leurs centres de gravité, etc., sans être arrêté par les quantités radicales, comme Hudde l'est dans sa méthode pour les *maxima* et les *minima*. Les Anglais ont vu clairement la méthode des fluxions dans ces deux écrits de Neuton, après qu'elle a été connue d'ailleurs dans toute l'Europe par les écrits de Leibnitz et des frères Bernoulli; mais les géomètres des autres nations n'ont pas eu tout-à-fait les mêmes yeux. En convenant que le développement des radicaux en séries est un pas considérable que Neuton a fait, ils voient immédiatement, et sans le secours d'aucune lumière postérieure et conjecturale, que les méthodes de Fermat, de Wallis et de Barrow, pouvaient servir à trouver les résultats concernant les quadratures, que Neuton se contente d'énoncer, puisqu'après le développement des radicaux, s'il y en a, il n'est plus question que de sommer des quantités monômes. Ils avouent que les deux pièces dont il s'agit contiennent, si l'on veut, une indication vague de la méthode des fluxions : indication peut-être suffisante pour montrer que Neuton possédait alors les premiers principes de cette mé-

thode, mais trop obscure pour en donner l'intelligence au lecteur. Et ce qui rend cette conjecture très-vraisemblable, c'est qu'Oldembourg, secrétaire de la société royale, envoyant (le 10 juillet 1673) à Sluze un exemplaire de la méthode de celui-ci pour les tangentes, que l'on avait imprimée à Londres, rapporte un fragment de lettre de Neuton, où, après avoir dit que cette méthode appartient bien véritablement à Sluze, Neuton poursuit ainsi: *Quant aux méthodes* (il entend celle de Sluze et la sienne propre), *elles sont les mêmes, quoique je les croie tirées de principes différens. Je ne sais cependant si les principes de M. Sluze sont aussi féconds que les miens, qui s'étendent aux équations affectées de termes irrationnels, sans qu'il soit nécessaire d'en changer la forme.* Aurait-il parlé avec tant de réserve, et n'aurait-il pas dit nettement que la méthode de Sluze et celle des fluxions étaient différentes, s'il avait possédé alors la dernière dans un degré aussi avancé qu'on l'a prétendu depuis? Supposera-t-on qu'il a parlé ainsi par modestie? Mais on peut dire la vérité, même lorsqu'elle nous est avantageuse, sans sortir des bornes de la modestie. Toutes ces considérations prouvent, ce me semble, que si les deux écrits *de Analysi per æquationes, etc.*, et la *lettre* de 1672, contiennent la méthode des fluxions, elle y était au moins couverte d'épaisses

ténèbres. Mais qu'elle y fût ou non, on va démontrer qu'avant d'avoir trouvé son calcul différentiel, ou Leibnitz n'a point eu communication de ces deux écrits, ou il n'en a tiré aucune lumière. C'est un point capital que ses défenseurs n'ont pas suffisamment établi, et sur lequel j'espère ne laisser aucun doute.

Leibnitz vint en France en 1672, au sortir des universités d'Allemagne, où il s'était principalement occupé du droit public et de l'histoire : il était néanmoins déjà initié aux Mathématiques, puisqu'en 1666, il avait publié un petit livre sur quelques propriétés des nombres. Il passa à Londres au commencement de 1673; il y vit Oldembourg, et ils lièrent ensemble un commerce de lettres. Dans une de ces lettres, écrite de Londres même à Oldembourg, Leibnitz expose qu'ayant trouvé une manière de sommer certaines suites par le moyen de leur différences, on lui avait montré cette méthode déjà imprimée dans un livre de Mouton, chanoine de Saint-Paul de Lyon, sur *les diamètres du soleil et de la lune*; qu'alors il imagina une autre manière qu'il explique, de former les différences, et d'en conclure les sommes des suites; qu'il est en etat de sommer une suite de fractions dont les numérateurs sont l'unité, et les dénominateurs sont, ou les termes de la suite des nombres naturels, ou ceux de la suite des nombres triangu-

laires, ou ceux de la suite des nombres pyramidaux, etc. Toutes ces recherches sont ingénieuses, et semblent avoir un rapport du moins éloigné au calcul des différences. Jamais les Anglais n'ont dit, et d'ailleurs il n'en existe pas la moindre preuve, qu'à ce premier voyage Leibnitz ait vu les deux écrits cités de Neuton.

Après quelques mois de séjour à Londres, Leibnitz revint à Paris, où il se lia d'amitié avec Huguens, qui lui ouvrit le sanctuaire de la plus profonde géométrie. Il trouva bientôt la quadrature approchée du cercle, par une série analogue à celle que Mercator avait donnée pour la quadrature approchée de l'hyperbole : il communiqua sa série à Huguens, qui en fit de grands éloges, et à Oldembourg, qui lui répondit que Neuton avait déjà trouvé des choses semblables, non-seulement pour le cercle, mais encore pour d'autres courbes, et qui en envoya des essais. En effet, la théorie des suites était déjà très-avancée dès ce temps-là en Angleterre; et quoique Leibnitz y eût pénétré fort avant de son côté, il a toujours néanmoins reconnu que les Anglais, et surtout Neuton, l'avaient précédé et surpassé dans cette branche de l'analyse; mais elle n'est point le calcul différentiel, et les Anglais ont montré une partialité trop évidente, en cherchant à lier ensemble ces deux objets.

Écoutons, et pesons l'histoire que Leibnitz fait

de sa découverte du calcul différentiel. Il raconte que joignant ses anciennes remarques sur les différences des nombres à ses nouvelles méditations de géométrie, il trouva ce calcul vers l'année 1676; qu'il en fit de merveilleuses applications à la géométrie; qu'étant obligé, vers le même temps, de retourner à Hanovre, il ne put suivre entièrement le fil de ses méditations; que cherchant néanmoins *à faire valoir* sa nouvelle découverte, il passa par l'Angleterre et par la Hollande; qu'il resta quelques jours à Londres, où il fit connaissance avec Collins, qui lui montra plusieurs lettres de Grégori, de Neuton et d'autres mathématiciens, lesquelles roulaient principalement sur les séries. D'après cet exposé, il semblerait que Leibnitz, voulant répandre *sa nouvelle découverte*, aurait alors fait connaître le calcul différentiel en Angleterre. Ajoutons que dans une lettre de Collins à Neuton, du 5 mars $167\frac{6}{7}$, il est dit que Leibnitz, ayant passé une semaine à Londres, au mois d'octobre 1676, *avait remis à Collins quelques écrits* * dont Neuton recevrait incessamment des extraits ou des copies. Collins ne désigne point la nature de ces

* Ce passage et plusieurs autres grands morceaux de cette lettre, ont été supprimés dans le *Commercium epistolicum*. Voyez-la en entier dans les œuvres de Wallis, tom. III, pag. 646.

Neuton; ouvrage publié sur la fin de 1686. Analysons brièvement ces trois pièces.

La lettre de Neuton contient, indépendamment de différentes recherches sur les suites qu'il faut ici mettre de côté, plusieurs théorèmes qui ont la méthode des fluxions pour base; mais l'auteur en cache les démonstrations. Il se contente de dire qu'il les a tirés de la solution d'un problème général qu'il énonce énigmatiquement sous des lettres transposées, et dont le sens expliqué après coup, est tel : *Étant donnée une équation qui contienne des quantités fluentes, trouver les fluxions : et réciproquement.* Quelle lumière Leibnitz pouvait-il tirer d'un pareil logogryphe? Tout ce qu'on peut conclure de cette lettre, c'est qu'au temps où elle a été écrite Neuton possédait la méthode des fluxions, par où néanmoins il faut entendre seulement la méthode des tangentes et des quadratures; car il n'était pas alors question de la méthode pour l'intégration des équations différentielles, qui n'est venue que beaucoup plus tard, comme on l'a vu ci-dessus.

Leibnitz, dans sa lettre à Oldembourg, commence par dire qu'il avait reconnu, comme Neuton, que la méthode de Sluze pour les tangentes était imparfaite. Ensuite il explique ouvertement et sans mystère celle du calcul différentiel, assurant que depuis long-temps il s'en servait pour mener

les tangentes des lignes courbes. Voilà donc la solution claire et positive du problème dont Neuton cherchait avec tant de soin à se réserver la possession.

Le Scholie du livre *des Principes* porte : *Dans un commerce de lettres que j'entretenais, il y a dix ans* *, *avec le très-savant géomètre M. Leibnitz, ayant mandé que je possédais une méthode pour déterminer les* maxima *et les* minima, *mener les tangentes et faire autres choses semblables, laquelle réussissait également dans les équations rationnelles et dans les quantités radicales, et ayant caché cette méthode sous des lettres transposées qui signifiaient :* Etant donnée une équation qui contienne un nombre quelconque de quantités fluentes, trouver les fluxions, et réciproquement; *cet homme célèbre répondit qu'il avait trouvé une méthode semblable, et me communiqua sa méthode, qui ne différait de la mienne que dans l'énoncé et la notation.* L'édition de 1714 ajoute : *Et dans l'idée de la génération des quantités.* Peut-on dire, d'une manière plus formelle, que Leibnitz avait trouvé de son côté la méthode des fluxions, et qu'il l'avait communiquée franche-

* Par l'entremise d'Oldembourg.

ment, sans se cacher dans les ténèbres comme Neuton?

Il est donc constant par ces trois pièces, que si Neuton a trouvé le premier la méthode des fluxions, comme on prétend l'établir par sa lettre du 10 décembre 1672, Leibnitz l'a trouvée également de son côté, sans rien emprunter de son rival. Ces deux grands hommes sont arrivés, par la force de leur génie, à la même découverte, par des chemins différens ; l'un, en regardant les fluxions comme de simples rapports de quantités qui naissent ou s'évanouissent au même instant; l'autre, en considérant que dans une suite de quantités *qui croissent ou décroissent*, la différence entre deux termes consécutifs peut devenir infiniment petite, c'est-à-dire, plus petite que toute grandeur finie déterminable.

Cette opinion, aujourd'hui reçue universellement, excepté en Angleterre, était celle de Neuton même, lorsqu'il publia pour la première fois son livre *des Principes*, comme on le voit par le Scholie que j'ai cité. La vérité était alors proche de sa source, et les passions ne l'avaient pas encore altérée. En vain Neuton, entraîné dans la suite par la flatterie de ses disciples et de ses compatriotes, a-t-il changé de langage; en vain a-t-il prétendu que la gloire d'une découverte appartenait toute entière au premier inventeur, et que les se-

conds inventeurs ne devaient point être admis au partage. D'abord, sans discuter sa prétendue antériorité, on lui a répondu que deux hommes qui font séparément une même découverte importante, ont un droit égal à l'admiration, et que celui qui la publie le premier a le premier droit à la reconnaissance publique. Ensuite on lui a prouvé que son principe n'avait pas même ici une juste application.

Le projet de dépouiller Leibnitz et de le faire regarder comme plagiaire, fut porté si loin en Angleterre, que pendant le feu de la dispute, on osa dire (et Neuton lui-même n'eut pas honte d'appuyer l'objection), que le calcul différentiel de Leibnitz n'était autre chose que la méthode de Barrow. A quoi pensez-vous, répondit Leibnitz, de me faire une pareille imputation? Vous voulez tout à la fois, que le calcul différentiel soit la méthode de Barrow, quand je me l'attribue, et que M. Neuton en soit l'inventeur, quand il s'agit de me le ravir! Faut-il que la passion vous aveugle au point de ne pas sentir cette contradiction manifeste? Si le calcul différentiel était réellement la méthode de Barrow (et vous savez très-bien qu'il ne l'est pas), qui mériterait le plus d'être appelé *plagiaire*, ou de M. Neuton, qui a été le disciple, l'ami de Barrow, qui a été à portée de puiser dans la conversation des vues que Barrow n'a pas mises dans

ses livres, ou de moi, qui n'ai pu connaître que les livres, et qui n'ai jamais eu de relation avec l'auteur?

Jean Bernoulli, qui avait appris, conjointement avec son frère, l'analyse infinitésimale dans les écrits de Leibnitz, opposa au *Commercium epistolicum* une lettre où il mit en avant, que non-seulement la méthode des fluxions n'avait pas précédé le calcul différentiel, mais qu'elle pouvait en être née, et que Neuton ne l'avait réduite à des opérations analytiques générales en forme d'algorithme, qu'après que le calcul différentiel était déjà répandu dans tous les journaux de Hollande et d'Allemagne. Les raisons de Jean Bernoulli sont en substance, 1.° que le *Commercium epistolicum* n'offre aucun vestige que Neuton eût employé, dans les écrits allégués, les lettres pointées pour désigner les fluxions; 2.° que dans le livre *des Principes*, où l'auteur avait si souvent occasion d'employer ce calcul et d'en donner l'algorithme, il ne l'a point fait; qu'il procède partout par les lignes et les figures, sans aucune analyse déterminée, et seulement à la manière de Huguens, de Roberval, de Cavalleri, etc.; 3.° que les lettres pointées n'ont commencé à paraître que dans le troisième volume des œuvres des Wallis, plusieurs années après que le calcul différentiel était connu partout; 4.° que la vraie méthode de différencier les différences, ou de prendre les fluxions des fluxions,

était ignorée de Neuton, puisque même dans son traité des *Quadratures*, publié seulement en 1704, la règle qu'il donne à la fin pour déterminer les fluxions de tous les ordres, en regardant ces fluxions comme les termes de la puissance d'un binôme formé d'une quantité variable et de sa fluxion première, et traitant cette fluxion première comme constante, est fausse, excepté seulement pour le terme qui répond à la fluxion première; 5.° qu'à la même époque de 1704, Neuton n'était pas versé dans le calcul intégral des équations différentielles, que Leibnitz et les frères Bernoulli avaient déjà poussé si loin : autrement il n'aurait pas manqué de traiter cette partie, la plus difficile de l'analyse infinitésimale, et au moins aussi digne d'être promulguée et perfectionnée, que les quadratures sur lesquelles il s'était fort étendu.

A cette lettre, les Anglais répondirent que la *notation* ne faisait pas la méthode; que les principes du calcul des fluxions étaient contenus dans les lettres et dans le grand ouvrage de Neuton; que la règle du traité des *Quadratures* pour trouver les fluxions de tous les ordres était vraie, en supprimant les dénominateurs des termes de la série, et donnait par conséquent des quantités *proportionnelles* aux véritables fluxions. Je ne vois pas qu'ils aient répondu à la dernière objection.

Les partisans de Leibnitz répliquèrent que les

avantages d'une méthode analytique tiennent en grande partie à la simplicité de l'algorithme; que la caractéristique de Leibnitz avait déjà fait faire des progrès immenses à la nouvelle analyse dans un temps où presque personne n'entendait le livre de Neuton; qu'on tentait vainement de nier ou de pallier l'erreur de la règle de Neuton pour trouver les fluxions de tous les ordres, et qu'on ne pouvait pas dire que les termes d'une suite de fractions fussent *proportionnels* aux termes d'une autre suite de fractions, lorsque les termes correspondans avaient des dénominateurs différens, comme il arrivait ici.

Telles furent à peu près les raisons alléguées et débattues entre les deux partis pendant plus de quatre années. La mort de Leibnitz, arrivée en 1716, semblait devoir mettre fin à la contestation; mais les Anglais, poursuivant l'ombre de ce grand homme, publièrent en 1726 une édition du livre *des Principes*, où l'on supprima le *Scholie* qui concernait Leibnitz. C'était avouer sa découverte d'une manière bien authentique et bien maladroite. Ne devaient-ils pas sentir que l'on attribuerait à une prévention nationale, ou peut-être à un sentiment encore plus injuste, le dessein chimérique d'anéantir le témoignage qu'une noble émulation avait autrefois rendu à la vérité?

Il s'est trouvé dans les temps postérieurs des

géomètres qui, sans prendre un parti décisif entre Neuton et Leibnitz, ont objecté au dernier que la métaphysique de sa méthode était obscure ou même défectueuse; qu'il n'y a point de quantités infiniment petites, et qu'il reste des doutes sur l'exactitude d'une méthode où ces quantités sont introduites. Mais Leibnitz peut répondre : Je n'ai proposé que subsidiairement l'existence des quantités infiniment petites, ou comme une simple hypothèse qui sert à abréger le calcul et les raisonnemens sur lesquels il est fondé; je n'ai pas besoin qu'il y ait des quantités infiniment petites; il suffit, comme je l'ai imprimé dans plusieurs ouvrages, que mes *différences* soient moindres que toute quantité *finie* que vous voudrez assigner, et que par conséquent l'erreur qui peut résulter de ma supposition, soit au-dessous de toute erreur déterminable, c'est-à-dire, absolument nulle. La manière dont Archimède démontre la proportion de la sphère au cylindre, a pour base un principe semblable. M. de Fontenelle, qui était d'ailleurs bien intentionné pour moi, a eu tort de se contenter de dire à la tête de sa *Géométrie de l'infini*, qu'après avoir admis d'abord les infiniment petits, je m'étais relâché dans la suite jusqu'au point de réduire les infiniment petits de différens ordres, à n'être que des *incomparables*, dans le sens qu'un grain de sable serait incomparable au globe de la terre : il

devait ajouter que cette similitude ne me sert qu'à présenter une idée générale et sensible de mes différences à l'imagination de certains lecteurs, et que dans le mémoire auquel il fait allusion, je finis par remarquer expressément qu'au lieu de l'infini, ou de l'infiniment petit, il faut prendre des quantités aussi grandes, ou aussi petites qu'il est nécessaire, pour que l'erreur soit moindre que toute erreur donnée. La méthaphysique de mon calcul est donc entièrement conforme à celle de la méthode d'*exhaustion* des anciens, dont jamais personne n'a révoqué la certitude en doute; et quoi qu'on ait voulu dire, mon rival n'a réellement à cet égard aucun avantage sur moi.

Leib. op. t. II, pag. 370.

Enfin, on a dit que malgré l'affectation de Neuton à n'employer que la synthèse dans son livre *des Principes*, on ne peut pas douter aujourd'hui qu'il n'en eût trouvé un grand nombre de propositions par la méthode analytique des fluxions; que cette application à une foule de si grands objets suppose une longue suite de méditations; et qu'au moins, selon toutes les apparences, il possédait la méthode des fluxions avant Leibnitz : car il a dû employer bien des années à composer son livre. Examinons les conséquences qu'on veut tirer de cette induction.

Parallèle de Néuton et de Leibnitz.

Il n'a peut-être pas existé d'homme plus doué que Neuton, de cette intelligence et de cette vi-

gueur de tête capables de concevoir, de suivre et d'exécuter un vaste plan. Leibnitz n'a point donné d'ouvrage particulier, qui pour l'importance et l'enchaînement des matières, soit comparable au livre *des Principes* : trop emporté par la vivacité de son génie, par la multitude et la variété de ses occupations, de ses voyages, de ses correspondances littéraires avec la plupart des savans de tous les pays du monde, il ne pouvait pas s'astreindre à creuser long-temps un même sujet, ni à poursuivre en détail toutes les conséquences d'un grand principe; mais le recueil de ses ouvrages et son *Commerce épistolaire* avec Jean Bernoulli portent partout le plus haut caractère de l'invention. Il sème partout des idées neuves, et des germes de théories dont le développement produirait quelquefois des traités entiers. Il a sur Neuton l'avantage d'avoir inventé et fort avancé le calcul intégral des équations différentielles. S'il n'a pas égalé le géomètre anglais du côté de la profondeur, il paraît le surpasser par cette pénétration rapide et cette pointe d'esprit qui vont saisir dans une matière les questions les plus subtiles et les plus piquantes. L'un a laissé une plus grande masse de vérités géométriques; l'autre a plus accéléré en son temps les progrès de la science, par la notation simple et commode de son calcul, les applications qu'il en fit lui-même, ou qu'il mit les savans à portée d'en faire, les encourage-

mens qu'il leur donnait, et les routes nouvelles qu'il ouvrait continuellement à leurs méditations. Quelque long travail qu'ait pu demander le livre *des Principes*, on ne doit pas oublier que cet ouvrage n'a paru que deux ou trois ans après que Leibnitz avait publié son calcul différentiel, et les premières notions du calcul intégral. Enfin, il existe une preuve unique et bien puissante du génie de Leibnitz en géométrie : la méthode de différencier *de curvâ in curvam* : découverte originale, que Neuton n'a point connue, et qui s'applique à une infinité de beaux problèmes, tels que ceux des trajectoires orthogonales ; ceux des courbes qui coupent une suite de courbes données de même nature, de telle manière que des fonctions pareilles de ces dernières courbes soient égales entr'elles, etc. Je laisse au lecteur à prononcer sur la prééminence entre ces deux grands hommes.

SECTION VI.

Suite de la même querelle. Guerre de problèmes entre Jean Bernoulli et les Anglais. Variétés.

I.

Dans cette longue dispute on oublia trop souvent les égards mutuels que les bienséances sociales imposent à tous les hommes; mais au moins elle eut l'avantage d'exciter la plus vive émulation parmi les plus grands géomètres du temps. On en vint à des défis de problèmes très-difficiles, dont les solutions donnèrent lieu à de nouvelles théories, et accrurent considérablement le domaine de la géométrie.

Quelque temps avant sa mort, Leibnitz voulant *tâter le pouls aux Anglais*, comme il disait, leur fit proposer le fameux problème des trajectoires orthogonales, lequel consistait à trouver la courbe qui coupe une suite de courbes données, sous un angle constant, ou sous un angle variable suivant une loi donnée. On rapporte que Neuton rentrant chez lui, bien fatigué, reçut le problème à quatre heures, et ne se coucha point qu'il ne l'eût résolu. Sa méthode se

Font. Eloge de Neuton.

Transac. phil. 1716. réduit à ce peu de paroles : *La nature des courbes à couper donne leurs tangentes aux points d'intersection ; les angles d'intersection donnent les perpendiculaires des courbes coupantes ; deux perpendiculaires voisines donnent par leurs points de concours le centre de courbure de la courbe coupante. Placez commodément l'axe des abscisses, et prenez la fluxion première de l'abscisse pour l'unité : la position de la perpendiculaire donnera la fluxion première de l'ordonnée à la courbe cherchée, et la courbure de cette même courbe donnera la fluxion seconde de l'ordonnée : ainsi le problème sera toujours réduit en équation. Quant à l'intégration de l'équation,* ajoutait l'auteur, *elle appartient à une autre méthode.* Les Anglais triomphaient déjà ; mais Jean Bernoulli, chargé de la cause de Leibnitz qui venait de mourir, se moqua hautement de ce projet de solution ; il soutint que rien n'était plus facile que de parvenir à l'équation de la trajectoire ; qu'on avait même déjà traité depuis long-temps avec succès plusieurs questions particulières de cette espèce ; que l'affaire importante était d'intégrer l'équation différentielle de la trajectoire, lorsqu'elle pouvait l'être, soit exactement, soit par les quadratures des courbes ; que cette intégration, loin d'être étrangère au problème, en était le complément nécessaire : d'où il

concluait que Neuton n'ayant donné pour cela aucun moyen, n'avait fait qu'éluder et n'avait point du tout vaincu les véritables difficultés de la question.

II.

Nicolas Bernoulli (fils de Jean) résolut d'une manière très-élégante le cas particulier où les courbes coupées sont des hyperboles d'un même centre et d'un même sommet. Son cousin Nicolas Bernoulli et Herman traitèrent la question plus généralement par des méthodes qui revenaient à la même, sans qu'ils se fussent rien communiqué. Ces méthodes s'appliquaient facilement à tous les cas où les courbes coupées sont géométriques, et même à quelques courbes transcendantes. Herman ayant voulu donner aux formules plus d'extension qu'elles n'en comportaient, tomba dans quelques méprises qui furent relevées par les Bernoulli. Du reste, ils s'accordaient tous à regarder la solution de Neuton comme insuffisante et de nul usage.

NICOLAS BERNOULLI, né en 1695, mort en 1726.

Act. Lips. 1716.

Act. Lips. 1717.

III.

Il paraît que dès-lors Neuton abandonna entièrement le champ de bataille. Son grand âge et sa haute réputation lui donnaient bien en effet le droit de se reposer. Quelques-uns de ses amis ou

TAYLOR, né en 1685, mort en 1731. de ses disciples continuèrent la guerre avec chaleur. Taylor fut celui qui s'y distingua le plus.

Dès l'année 1715, il s'était placé au nombre des grands géomètres par son livre : *Methodus incrementorum directâ et inversa*, ouvrage excellent quant au fond, mais alors fort obscur, et auquel Jean Bernoulli n'avait pas rendu toute la justice qu'il méritait, ce qui blessa vivement l'auteur, homme d'ailleurs très-irascible. Dans cette diposition, Taylor saisit l'occasion qu'il crut avoir trouvée de se venger, en prenant hautement le parti de Neuton. Sans s'arrêter à développer la solution de celui-ci, il en donna une de son propre fonds, laquelle satisfaisait à toute l'étendue de la question telle que Leibnitz l'avait proposée. S'il s'en fût tenu là, il n'aurait mérité que des louanges ; mais emporté par son ressentiment contre Jean Bernoulli, il mit à la tête de sa solution quelques réflexions injurieuses contre les partisans de Leibnitz, ayant principalement en vue Jean Bernoulli, leur chef : il y disait, entr'autres choses, que s'ils ne voyaient pas comment la solution de Neuton conduisait aux équations du problème, il fallait s'en prendre à leur ignorance : *illorum imperitiæ tribuendum*. L'homme à qui s'adressait cette étrange incartade n'était pas endurant, et il la repoussa de la manière la plus décisive et la plus propre à humilier Taylor.

Transac. phil. 1717.

IV.

Dans une dissertation sur *les trajectoires orthogonales*, composée en commun par Jean Bernoulli et son fils Nicolas, on commença par avouer que la solution de Taylor était exacte, et même qu'elle supposait en lui de la sagacité; mais ensuite on fit voir qu'elle n'était pas à beaucoup près assez générale, et qu'il existait un grand nombre de cas résolubles auxquels elle ne pouvait s'appliquer. En même temps, Jean Bernoulli donna une autre méthode qui, à l'avantage d'être incomparablement plus simple, joignait celui d'embrasser toutes les courbes géométriques, toutes les courbes mécaniques *complètement* semblables, et enfin un grand nombre de courbes mécaniques *incomplètement* semblables. Ces découvertes étaient le produit d'une analyse profonde, nouvelle et délicate. L'auteur avait entre les mains un instrument qu'il maniait avec dextérité, la méthode de différencier *de curvâ in curvam*. Sa victoire ne fut pas équivoque; et Taylor, malgré le ton de suffisance qu'il avait d'abord pris, fut forcé au moins tacitement de reconnaître ici un supérieur. Act. Lips. 1718.

Je remarquerai en passant que les auteurs de cette dissertation rapportent à ce même sujet un petit écrit de Nicolas Bernoulli, neveu, où l'on Remarque importante.

trouve, pour la première fois, le fameux théorème de condition, d'où dépend la réalité des équations différentielles du premier ordre à trois variables ; théorème que des géomètres modernes ont cherché à s'attribuer.

V.

Divers problèmes.

Pendant qu'on traitait la question des trajectoires, Taylor proposa divers problèmes, alors nouveaux et fort difficiles, sur l'intégration des fractions rationnelles; Jean Bernoulli, qui avait donné, en 1702, comme nous l'avons vu, les élémens de cette théorie, résolut facilement tous ces problèmes; il y en ajouta même d'autres, qui ne laissaient plus rien à désirer; et des résultats auxquels il parvint, il forma une suite de théorèmes curieux dont le développement et les démonstrations exercèrent utilement son fils et son neveu.

R. Cotes, né en 1682, mort en 1716.

Roger Cotes, professeur de mathématiques à Cambridge, avait précédé Taylor et Jean Bernoulli dans cette dernière recherche. Son fameux livre, intitulé : *Harmonia mensurarum,* contient tout le calcul intégral des fractions rationnelles, réduit en formules générales très-commodes; mais cet ouvrage ne vit le jour qu'en 1722, six ans après la mort de l'auteur : probablement Taylor, et à plus forte raison Jean Bernoulli, n'en connaissaient pas la teneur. On a rassemblé dans ce même vo-

lume plusieurs autres découvertes de Cotes; telles que sa Méthode pour estimer les erreurs dans les mathématiques mixtes, ses remarques sur la *Méthode différentielle* de Neuton, son fameux théorème pour la résolution *des équations quadratiques*, etc. Cotes mourut à la fleur de son âge; Neuton l'estimait infiniment; il disait souvent de lui : *Si M. Cotes eût vécu, il nous aurait appris quelque chose.*

VI.

L'animosité qui régnait entre Taylor et Jean Bernoulli augmentait tous les jours. En 1716, il parut à la louange de Jean Bernoulli une lettre dans laquelle Taylor était traité ouvertement de *plagiaire*. Il s'en plaignit avec amertume : il rétorqua l'accusation, en faisant voir que Jean Bernoulli, dans sa dernière solution du problème des isopérimètres, n'avait fait que travestir la solution de son frère, et que toutes les simplifications qu'il y avait apportées, n'en changaient pas la nature. Alors Jean Bernoulli ne garda plus de ménagement; il fit paraître sous le nom d'un certain *Burcard*, maître d'école à Bâle, une réponse à Taylor, remplie d'injures et de railleries insipides, parmi lesquelles néanmoins on rencontre quelques vérités utiles.

Act. Lips. 1716.

VII.

Trajectoires réciproques.

Le problème des trajectoires orthogonales donna la naissance à celui des trajectoires réciproques, proposé à la fin de la dissertation des Bernoulli père et fils. On demandait les courbes qui étant construites en deux sens contraires sur un même axe donné de position, puis venant à se mouvoir parallèlement à elles-mêmes, avec des vitesses inégales, se coupaient constamment sous un même angle donné. Ce fut un nouveau sujet de difficultés analytiques à vaincre, et d'extension pour la science. Il fut long-temps agité entre Jean Bernoulli et un Anglais anonyme qu'on sut depuis être le docteur Pemberton, ami particulier de Neuton. Nous sommes encore obligés de dire qu'ici Jean Bernoulli conserva sa supériorité, par la simplicité et l'élégance de ses solutions.

VIII.

Les géomètres anglais avaient formé une ligue contre Jean Bernoulli, et ils l'attaquaient sur toutes sortes de sujets. Seul, dit Fontenelle, comme le fameux Horatius Coclès, il soutenait sur le pont tout l'effort de leur armée. Keil, soldat plus hardi que vaillant, crut avoir trouvé l'occasion de l'embarrasser. La théorie de la résistance des milieux au mouvement des corps qui les traversent, formait

une partie considérable du livre *des Principes*. Neuton avait déterminé la courbe que décrit un projectile dans un milieu résistant comme la simple vitesse ; mais il n'avait pas touché au cas, alors plus difficile, où le milieu résiste comme le carré de la vitesse. Keil proposa ce cas à Jean Bernoulli, qui non-seulement le résolut en très-peu de temps, mais qui étendit la solution à l'hypothèse générale où la résistance du milieu serait comme une puissance quelconque de la vitesse du mobile. Lorsque cette théorie fut trouvée, l'auteur offrit, à diverses reprises, de l'envoyer à un homme de confiance à Londres, sous la condition que Keil remettrait aussi sa solution; mais Keil, quoique vivement interpellé, garda un profond silence. La raison en était facile à deviner; il n'avait pas résolu son problème : en le proposant, il s'était attendu que personne ne trouverait ce qui avait échappé à la sagacité de Neuton. Il fut cruellement trompé dans sa conjecture ; et son défi, plus qu'indiscret, lui attira de la part du géomètre de Bâle une réprimande d'autant plus piquante, que la seule manière solide d'y répondre était de résoudre le problème, et que Keil ne put trouver ce moyen, ni dans ses propres forces, ni dans le secours de ses amis. Le triomphe de Jean Bernoulli fut complet. Dans la première ivresse de sa victoire, il s'abandonna contre ses rivaux à des sarcasmes et à des

plaisanteries, qu'on lit avec peine, mais pardonnables sans doute à un homme impétueux, qui, ayant été attaqué insidieusement, cherchait tous les moyens de venger les outrages faits à lui-même, et à un illustre ami dont il pleurait encore la perte.

Ces savans combats attiraient l'attention de tous les géomètres; et malgré l'aigreur qu'y mêlaient les passions humaines, ils échauffaient les esprits, et faisaient naître de tous côtés de nouveaux prosélytes aux mathématiques.

Je reviens un peu sur mes pas, et je reprends quelques autres sujets que j'ai été obligé de laisser en arrière.

IX.

Montmort, né en 1678, mort en 1718.

En 1708 parût l'*Analyse des jeux de hasard*, de Remond de Montmort: ouvrage rempli de vues fines et profondes, dont l'objet est de soumettre des probabilités au calcul, d'estimer des hasards, de régler des paris, etc. Il n'appartient pas proprement à la nouvelle géométrie; néanmoins il contribua à ses progrès, soit en aiguisant en général l'esprit des combinaisons, soit par des extensions que l'auteur donna à la théorie des suites, heureux supplément à l'imperfection des méthodes rigoureuses, dans toutes les parties des mathématiques.

Trois ans après, Moivre fit paraître sur le même

sujet un petit traité intitulé : *Mensura sortis*, principalement remarquable par la clarté des idées, et les applications ingénieuses qu'il contient de la théorie des suites *récurrentes*. Cet essai, accru successivement par les réflexions de l'auteur, est devenu un ouvrage considérable, admiré de tous les géomètres, et dans lequel quelques-uns même ont puisé la matière de savans mémoires. La meilleure édition qui s'en soit faite est celle de 1738, en anglais, sous le titre : *Doctrine of Chances*. On sait que Moivre était un géomètre français que la révocation de l'édit de Nantes avait forcé de s'expatrier; il s'était retiré à Londres. Né avec un talent supérieur pour la géométrie, le mauvais état de sa fortune l'obligeait de donner des leçons de mathématiques pour vivre; ce qui l'empêcha de pousser ces sciences aussi loin qu'il en était capable. Neuton avait pour lui la plus haute estime. On rapporte que lorsque dans les dix à douze dernières années de la vie du géomètre anglais, on venait lui demander quelques explications sur ses ouvrages, il renvoyait les consultans à Moivre, disant : *Voyez M. de Moivre; il sait toutes ces choses-là mieux que moi.*

MOIVRE, né en 1668, mort en 1754.

X.

Nicolas Bernoulli, neveu, vint à Paris en 1711. Annoncé par une grande réputation, et joignant à

un profond savoir des mœurs douces et faciles, il se fit bientôt plusieurs illustres amis. Il se lia principalement avec Montmort, par la conformité de leurs goûts pour l'analyse des probabilités. Dès leur première entrevue, ils entrèrent en commerce de problèmes; et comme le séjour de la ville y apportait un peu trop de distractions, ils allèrent s'enfermer, pendant trois mois entiers, dans une maison de campagne de Montmort; uniquement occupés à *estimer* des hasards, à soumettre les chances du sort au calcul, et à épuiser, pour ainsi dire, toutes les subtilités de raisonnemens et de combinaisons que la vaste étendue du sujet pouvait faire naître. On trouve le résultat de toutes leurs discussions dans la seconde édition du livre de Montmort, qui parut en 1714, et qui est fort supérieure à la première.

XI.

Calcul aux différences finies.

Ce temps, fécond en nouveautés scientifiques, vit naître le *calcul aux différences finies,* devenu célèbre dans la suite. Taylor en avait donné les élémens dans son livre : *Methodus incermentorum.* De même que dans les calculs *différentiel* et *intégral,* l'ordonnée d'une courbe n'est autre chose que la somme de toutes les différences *infiniment petites* des ordonnées antécédentes, à compter d'une origine fixe : si l'on a une suite de

termes qui se succèdent par des différences *finies*; conformément à une loi *donnée*, un terme quelconque est la somme des différences des termes antécédens; et on pourra faire, sur ces sortes de suites, des opérations analogues à celles que l'on fait sur les suites dont les termes diffèrent par des quantités infiniment petites, appelées *différentielles*. En effet, si les différentielles intégrées donnent toujours des sommes, cela ne vient point de ce qu'elles sont infiniment petites, et précédées d'une infinité de grandeurs, mais seulement de ce qu'elles sont différentielles, et précédées de grandeurs de même espèce, et que par conséquent cette propriété doit se retrouver également dans le fini. Ainsi, une suite de nombres étant posée, si on peut trouver l'expression de la *différence finie* qu'elle aura après un nombre quelconque de termes, et ensuite l'intégrale de cette différence, il est évident que cette intégrale sera la somme de tous les termes précédens depuis l'origine de la suite; car la somme peut être considérée comme une quantité toujours croissante. A chaque terme nouveau qu'elle acquiert, ce terme est une différence, mais finie, dont elle s'augmente. Taylor avait sommé de cette manière plusieurs suites curieuses; mais sa méthode était fort obscure. Nicole, géomètre français, très-distingué, parvint non-seulement à la débrouiller, mais encore à lui donner

NICOLE, né en 1683, mort en 1759.

une forme plus élégante, et une extension considérable, par la sommation de diverses suites très-curieuses et absolument nouvelles. (Académie des sciences de Paris, années 1717, 1723, 1724 et 1727).

Depuis ce temps-là, plusieurs géomètres se sont fort occupés de ce calcul. Condorcet, entr'autres, en a fait l'objet de plusieurs mémoires. (Académie de Paris, années 1769, 1770, 1771).

Condorcet, né en 1743, mort en 1794.

Il semble que le calcul aux différences finies, et le calcul aux différences infiniment petites, ne sont que des branches d'un même tronc, puisque les différences finies peuvent diminuer jusqu'à devenir infiniment petites. Cependant, M. Lagrange, dans ses *Leçons sur le calcul des fonctions*, « trouve » de l'inconvénient à traiter le problème des dif» férences finies, comme celui des différences in» finiment petites. Il fait observer que la considé» ration des différences n'est pas nécessaire dans » le premier cas comme dans le second, et que » même leur emploi peut être plus incommode » qu'utile, parce que la suppression des termes qui » produit la simplification du calcul différentiel, » n'ayant pas lieu dans les différences finies, il ar» rive que les formules aux différences finies sont » plus compliquées que si elles contenaient im» médiatement les termes successifs eux-mêmes ». De là il conclut que le calcul aux différences finies

Pag. 291.

doit être plûtot renvoyé à celui de la sommation ordinaire des suites.

XII.

Suspendons un moment l'histoire des problèmes, et disons un mot des académies, afin de donner au moins en passant une foible marque de reconnaissance à ces établissemens, qui ont rendu et qui rendent encore tous les jours tant d'importans services aux sciences. Principales académies de l'Europe.

La société royale de Londres fut fondée, comme nous l'avons vu, en 1660. L'académie des sciences de Paris la suivit de près, mais elle a eu un sort bien différent. Jamais la société royale n'a essuyé d'orages; elle a toujours été honorée et respectée; les mémoires dont elle enrichit les sciences se sont toujours succédés régulièrement. Notre académie, après avoir fleuri avec éclat pendant plus de cent vingt-cinq ans, fut enveloppée, en 1793, dans la proscription universelle qui pensa replonger la France dans la barbarie : elle a retrouvé, en 1795, dans la constitution de notre institut national, une place qu'elle remplit dignement.

L'académie de Berlin, dont la fondation avait été projetée dès l'année 1700, reçut, en 1710, une forme régulière et légale sous les auspices de Frédéric I, électeur de Brandebourg, premier roi de Prusse; et Lebnitz en fut nommé le président perpétuel.

L'institut de Bologne, en Italie, fut établi en 1713, par les soins et les secours pécuniaires du célèbre comte de Marsigli, à qui l'histoire naturelle a tant d'obligations.

En 1726, Catherine I, impératrice de Russie, créa l'académie de Pétersbourg, dont son mari, Pierre-le-Grand, avait conçu le projet quelque temps avant sa mort arrivée en 1725.

Il y a aujourd'hui des académies des sciences dans presque toutes les principales villes de l'Europe, telles qu'Edimbourg, Dublin, Stokolm, Upsal, Copenhague, Utrecht, Gottingue, Turin, Véronne, Milan, Manheim, Munich, Rotterdam, Bâle, Varsovie, Madrid, Lisbonne, Bordeaux, Toulouse, Montpellier, Lyon, etc. Il y en a aussi une en Amérique, à Philadelphie. Toutes ces savantes sociétés, qui se sont formées successivement, et à divers intervalles de temps qu'il serait trop long d'indiquer, font paraître d'excellens mémoires sur toutes les parties de la philosophie naturelle.

SECTION VII.

Continuation des progrès de la géométrie. Nouveaux problèmes. Courbes tautochrones. Algèbre des sinus et des cosinus. Méthodes d'approximation.

I.

DEUX problèmes très-curieux, proposés par Herman, occupèrent pendant quelque temps les géomètres avec beaucoup d'utilité. Le premier consistait à trouver une courbe dont l'aire fût égale à une certaine fonction *donnée* des coordonnées; le second, beaucoup plus difficile, était de déterminer une courbe algébrique, telle que l'expression indéterminée de sa longueur renfermât la quadrature d'une courbe algébrique donnée, plus ou moins un nombre *donné* de quantités algébriques. Nicolas Bernoulli, fils, résolut le premier. Quant au second, il avoua (quoiqu'il écrivît sous les yeux de son père) qu'il ne pouvait le résoudre que dans certaines suppositions qui en restreignaient la généralité. Herman donna la solution générale par une méthode très-ingénieuse, fondée sur la théorie des développées; et dans cette occasion il eut de l'avantage sur les Bernoulli.

Act. Lips. 1719.

Ibid. 1720.

Ibid. 1724.

Un an après, Jean Bernoulli revint sur la même question, et la traita d'une manière plus directe et plus analytique, en lui donnant une nouvelle extension.

II.

Véritable difficulté de résoudre les problèmes dépendant de l'analyse infinitésimale.

Il y a une observation générale à faire sur tous les problèmes ainsi dépendant de l'analyse infinitésimale. On parvient pour l'ordinaire assez facilement à les mettre en équations : la principale difficulté est d'intégrer ces équations ; elle est souvent telle qu'elle échappe à toutes les forces de l'analyse. Aussi, les plus grands géomètres se sont-ils occupés à perfectionner le calcul intégral, ou l'intégration des équations différentielles de tous les ordres.

Riccati, né en 1690, mort en 1735.

Act. Lips. 1725.

Dans cette vue, le comte Jacques Riccati étant tombé sur une équation différentielle du premier ordre, à deux variables, fort simple en apparence, et n'ayant pu néanmoins parvenir à l'intégrer dans sa généralité, proposa la question aux géomètres. Aucun ne put atteindre complètement le but ; mais on assigna un grand nombre de cas où les indéterminées sont séparables, et où par conséquent l'équation s'intègre par les quadratures des courbes. Les auteurs de ces belles découvertes sont Riccati lui-même, Nicolas Bernoulli, neveu, Nicolas Bernoulli, fils, Daniel Bernoulli, son frère,

Goldebach. Tous arrivèrent, par des méthodes différentes, aux mêmes résultats. On appelle ordinairement l'équation dont il s'agit, *l'équation de Riccati*, quoiqu'elle eût déjà été considérée par Jacques Bernoulli, qui en avait intégré des cas particuliers : elle est dans l'analyse infinitésimale à peu près ce qu'est la quadrature du cercle dans la géométrie élémentaire. Lorsqu'une équation y est rappelée, le problème est censé résolu. Si l'équation ne tombe pas dans les cas séparables, on n'a plus d'autre ressource que de l'intégrer par les méthodes d'approximation.

DANIEL BERNOULLI, né en 1700, mort en 1782.

III.

A sa fondation, l'académie de Pétersbourg devint en quelque sorte un autre musée d'Alexandrie. Une colonie de géomètres, d'astronomes, de physiciens, de naturalistes, etc., fut appelée de tous les pays de l'Europe, dans la nouvelle capitale de l'empire russe. On compte dans ce nombre Herman, Nicolas Bernoulli, fils, Daniel Bernoulli, son frère, Euler, Leutman, Bulfinger, etc. Indépendamment de ces membres résidans, l'académie avait plusieurs illustres associés étrangers, tels que Jean Bernoulli, Wolf, Poleni, Michelotti, etc. Tous ces hommes, pleins de génie, ardens et laborieux, s'empressaient d'enrichir les *collections* de cette société.

An 1726.

On remarque, dans le premier volume, deux ou trois excellens mémoires de géométrie de Nicolas Bernoulli; malheureusement il fut enlevé par la mort presqu'à son entrée dans la carrière. Les deux hommes qui ont le plus contribué à la gloire de la géométrie dans cet établissement, à sa naissance et dans la suite, sont Daniel Bernoulli et Euler : le premier était déjà connu par sa solution du problème de *Riccati*; l'autre, destiné à faire une révolution générale dans la science analytique, s'était annoncé par diverses recherches, et entre autres par une très-belle solution du problème des trajectoires réciproques, qu'il a étendue et perfectionnée dans la suite. Il avait pris les premières connaissances des mathématiques sous Jean Bernoulli, qui, à la fin de sa propre solution du problème dont je viens de parler, prédit ce qu'un pareil élève deviendrait un jour.

EULER, né en 1707, mort en 1783.

IV.

La plupart des problèmes dont on s'était occupé dans la première effervescence de la nouvelle géométrie, avaient pour objet des théories particulières, auxquelles on n'avait pas donné toute l'extension dont elles étaient susceptibles. Daniel Bernoulli et Euler généralisèrent plusieurs de ces anciens problèmes, tels que ceux des chaînettes, des isopérimètres; ils en traitèrent d'autres absolu-

ment nouveaux et très-difficiles, comme, par exemple, la détermination des mouvemens oscillatoires d'une chaîne pesante, suspendue verticalement; la recherche des sons que rend une lame élastique frappée; les mouvemens qui résultent de la percussion excentrique des corps, etc. Toutes ces questions demandaient une grande sagacité primitive et une profonde science du calcul. Nos deux géomètres les résolvaient chacun de leur côté; et on ne doit pas oublier de remarquer le rare exemple de modération et d'honnêteté qu'ils donnèrent alors, et duquel ils ne se sont jamais écartés dans la suite. On les voyait se proposer réciproquement des problèmes, travailler sur les mêmes sujets, sans que jamais la rivalité de talens, ou la diversité des opinions sur certains points qui tenaient à la physique, ait altéré l'étroite amitié qu'ils avaient contractée ensemble dans la jeunesse. Tous deux se rendaient franchement et sans restriction une justice mutuelle : dans la science analytique, Daniel Bernoulli baissait pavillon devant Euler, qu'il appelait son *amiral*; mais dans les questions qui exigeaient plus de finesse d'esprit que de profonde géométrie, Daniel Bernoulli prenait à son tour le dessus : en effet, il avait un talent tout particulier d'appliquer la géométrie à la physique, et de soumettre à un calcul précis des phé-

nomènes que l'on ne connaissait que d'une manière vague et générale.

On a attribué à Pascal le projet de faire plier tous les hommes sous le joug de la religion, par la force du raisonnement et de l'éloquence : il semble de même qu'Euler a voulu faire dominer l'analyse sur toutes les parties des mathématiques. On le voit continuellement occupé à perfectionner ce grand instrument, et à montrer l'art de le bien manier. A peine était-il âgé de vingt-un ans, lorsqu'il donna une méthode nouvelle et générale pour intégrer des classes entières d'équations différentielles du second ordre, assujéties à certaines conditions. On n'arrivait auparavant au but que dans quelques cas particuliers, et même plutôt par la sagacité de l'analyste, que par des méthodes uniformes et déterminées.

Acad. de Pétersbourg 1728.

V.

En Italie, Gabriel Manfredi publiait de temps en temps d'ingénieux mémoires de géométrie et d'analyse dans les journaux et dans les *Commentaires* de l'institut de Bologne.

Un autre géomètre de la même nation, le comte de *Fagnani*, s'ouvrit un champ de problèmes nouveaux et d'une espèce très-piquante. Il apprit à déterminer des arcs d'ellipse, ou d'hyperbole, dont la différence est une quantité algébrique.

FAGNANI, né en 1682, mort en 1766.

Journal d'Italie. 1718.

Leibnitz et Jean Bernoulli, qui avaient tenté cette recherche, jugèrent qu'elle ne devait pas donner prise aux nouveaux calculs : ils avaient seulement résolu la question pour la parabole, mais en y employant le calcul algébrique ordinaire; elle est aussi résolue, par le même moyen, dans le traité des *sections coniques* du marquis de l'Hôpital. Fagnani appliqua très-adroitement le calcul intégral aux arcs d'ellipse et d'hyperbole; ce qui comprend la parabole, comme un cas particulier. Sa méthode consiste à transformer le polynôme différentiel qui représente l'arc élémentaire, elliptique ou hyperbolique, en un autre polynôme négativement semblable; d'où, par la soustraction, et l'intégration subséquente, résulte une quantité algébrique. La gloire d'avoir fouillé ce coin de la géométrie, si je puis parler ainsi, a placé Fagnani au rang des analystes les plus subtils.

VI.

Long-temps après, Euler ayant considéré la même matière, parvint non-seulement à résoudre les problèmes de Fagnani d'une manière nouvelle, mais il s'éleva à une méthode pour intégrer une classe fort étendue d'équations différentielles séparées, dont les deux membres n'étant pas intégrables chacun en particulier, forment néanmoins un tout absolument intégrable. On savait intégrer des Acad. de Pétersbourg. 1756.

équations de cette espèce, lorsque les deux membres dépendent tout à la fois des arcs de cercle ou des logarithmes. Les nouvelles intégrations d'Euler sont beaucoup plus étendues ; elles forment une nouvelle branche très-utile et très-piquante du calcul intégral : l'auteur y déploya toutes les ressources du génie et de la plus profonde science analytique. Sa méthode était néanmoins un peu indirecte. M. Lagrange en donna une qui n'a pas cet inconvénient (Mém. de l'académie de Turin, tom. IV, années 1766 et 1769) ; et Euler lui-même a encore simplifié celle-ci, (Académie de Pétersbourg, année 1778).

VII.

Courbes rectifiables sur la surface de la sphère.

Act Lips. 1718.

Le problème de Viviani, sur la quadrature de la voûte hémisphérique, en fit naître long-temps après un autre de pareille nature, proposé par un géomètre, d'ailleurs assez peu connu, nommé *Ernest d'Offemburg* : c'était de percer une voûte hémisphérique d'un nombre quelconque de fenêtres de forme ovale, avec cette condition que leurs contours fussent exprimés par des quantités algébriques ; ou bien, en d'autres termes, il fallait déterminer sur la surface d'une sphère des courbes algébriquement rectifiables. On voit d'abord que les courbes demandées ne peuvent pas être formées par l'intersection d'un plan avec la sphère,

puisque toutes ces intersections, en quelque sens qu'on les fasse, ne sont jamais que des cercles : elles appartiennent à la classe des courbes à double courbure. Ce problème, quoique curieux et difficile, demeura intact pendant long-temps, et on ignore même si l'auteur l'avait résolu.

Herman, dans un mémoire sur la rectification des épycycloïdes sphériques, crut que ces courbes satisfaisaient en général à la question d'Offemburg, ou qu'elles étaient algébriquement rectifiables; mais cela n'a lieu que dans certains cas particuliers; la rectification des épycycloïdes sphériques dépend en général de la quadrature de l'hyperbole. Jean Bernoulli releva l'erreur de Herman; et non content d'avoir assigné la véritable épycycloïde algébrique et rectifiable, il résolut directement et *à priori* le problème d'Offemburg, c'est-à-dire, qu'il donna la méthode générale pour déterminer les courbes rectifiables qu'on peut tracer sur la surface d'une sphère. Ensuite il proposa la même recherche à Maupertuis, comme au chef des géomètres français de ce temps-là, offrant d'ailleurs d'envoyer sa solution si on la désirait. L'offre fut acceptée. Pendant que la solution de Bernoulli était en route, Maupertuis résolut aussi le problème; du moins il l'assure, ajoutant qu'il eut grand soin de bien faire constater sa découverte : précaution qui devint en effet d'autant plus

Acad. de Pétersbourg. 1726.

MAUPERTUIS, né en 1698, mort en 1759.

nécessaire, que les deux solutions sont entièrement les mêmes quant au fond. *Voyez* le volume de l'académie des sciences de Paris, pour l'année 1732.

Ce même volume contient encore deux écrits intéressans sur la rectification des épycycloïdes sphériques; l'un est de Nicole, dont j'ai déjà parlé au sujet de l'intégration des formules aux différences finies; l'autre est de Clairaut, très-jeune alors, et déjà néanmoins compté au nombre des grands géomètres, par ses *Recherches sur les courbes à double courbure,* qu'il publia à l'âge de seize ans.

CLAIRAUT, né en 1713, mort en 1765.

VIII.

Utilité des problèmes théoriques.

Les ennemis de la géométrie, ceux qui ne la connaissent qu'imparfaitement, regardent les problèmes théoriques, qui en forment la partie la plus difficile, comme des jeux d'esprit qui absorbent un temps et des méditations qu'on pourrait mieux employer : opinion fausse et très-nuisible au progrès des sciences, si elle pouvait s'accréditer. Mais outre que les questions spéculatives, d'abord stériles en apparence, finissent souvent par s'appliquer à des objets d'utilité publique, elles subsisteront toujours comme un des moyens les plus propres à développer et à faire connaître toutes les forces de l'intelligence humaine.

Parmi les problèmes de ce genre, celui des

courbes tautochrones est remarquable par sa nature singulière, sa difficulté, et une nouvelle espèce de calcul qu'il a fallu employer pour le résoudre avec une grande généralité. Il consiste à trouver une courbe telle qu'un corps pesant, descendant le long de sa concavité, arrive toujours dans le même temps au point le plus bas, de quelque point de la courbe qu'il commence à descendre. Huguens, examinant les propriétés de la cycloïde, trouva qu'elle avait celle d'être la courbe tautochrone dans le vide; Neuton reconnut, dans son livre *des Principes*, que la même courbe était aussi tautochrone, lorsque le corps, toujours soumis à l'action d'une pesanteur constante et de directions parallèles, éprouve de plus à chaque instant, de la part de l'air, ou du milieu dans lequel il se meut, une résistance proportionnelle à sa vitesse : Euler et Jean Bernoulli déterminèrent, chacun de leur côté, la courbe tautochrone dans un milieu résistant comme le carré de la vitesse. Ces trois cas forment trois problèmes différens, pour chacun desquels on employa des méthodes différentes. Lorsque dans les deux premiers, le corps, après être descendu, remonte par la seconde branche de la cycloïde, il parcourt l'arc montant dans le même temps qu'il a parcouru l'arc descendant; de sorte que toutes les oscillations, qui sont composées chacune d'une descente et d'une mon-

Courbes tautochrones.

Ac. de Péters. 1729.

Ac. de Paris. 1730.

tée, se font dans le même temps. Mais, dans l'hypothèse de la résistance comme le carré de la vitesse, l'arc descendant tautochrone n'est pas le même que l'arc ascendant tautochrone, et il faut les chercher séparément. Ils se trouvent d'ailleurs exactement de la même manière, et par conséquent il suffit de considérer l'un ou l'autre.

FONTAINE, né en 1705, mort en 1771.

Ac. de Paris. 1734.

Fontaine fit un grand pas dans cette théorie. Il imagina une méthode d'un tour original, par laquelle seule il résolut les trois cas proposés : il y en ajouta même un quatrième, où la résistance serait comme le carré de la vitesse, plus le produit de la vitesse, par un coefficient constant. Et ce qui est très-remarquable, la tautochrone, dans ce quatrième cas, est la même que dans le troisième. L'esprit de cette méthode est de considérer les quantités variables, tantôt relativement à la différence de deux arcs voisins, tantôt relativement à l'élément d'un même arc : l'auteur emploie les différentielles de Leibnitz pour les variations de la première espèce, et les fluxions de Neuton pour celles de la seconde. Taylor avait donné de l'ouverture pour cette méthode *fluxio-différentielle* : Fontaine a eu avec lui une autre conformité, le défaut d'être obscur; mais tous deux ont été de profonds géomètres.

Euler, qui non content d'enrichir sans cesse la géométrie de son propre fonds, a quelquefois refait

les ouvrages des autres, et toujours en mieux, développa et mit dans le plus grand jour la méthode de Fontaine, en lui donnant d'ailleurs toutes les louanges qu'elle mérite. Il parcourt tous les cas déjà résolus : il en ajoute un autre qui les comprend tous, celui où la résistance est composée de trois termes, du carré de la vitesse, du produit de la vitesse par un coefficient donné, et d'une quantité constante. La méthode de Fontaine ne va pas plus loin. De plus, comme elle fait trouver la tautochrone indépendamment de la considération du temps, il restait encore à déterminer l'expression du temps que le corps emploie à parcourir un arc quelconque de la courbe : Euler a résolu ce nouveau problème, qui dépendait de l'intégration d'une équation différentielle très-compliquée. Ac. de Péters. 1764.

Fontaine croyait tellement avoir épuisé la théorie des tautochrones, que dans le recueil de ses œuvres, publié en 1764, il dit, en parlant de sa solution de 1734, qu'après qu'elle eut paru, *on ne parla plus de ce problème* : heureusement on en a parlé encore. Ce n'était pas assez d'avoir trouvé les tautochrones dans certaines hypothèses de forces accélératrices : il fallait, en renversant le problème, donner les moyens de discerner quelles sont les hypothèses de forces accélératrices qui admettent le tautochronisme : deux grands géomètres (MM. Dalembert et Lagrange) ont fait cette Ac. de Berlin. 1765.

découverte, et par là ont ouvert un nouveau champ de problèmes sur cette matière.

Lorsque les milieux sont rares, ou peu résistans, la recherche des tautochrones est plus facile. Euler a résolu avec beaucoup de simplicité et d'élégance, dans sa *Mécanique*, plusieurs cas de cette espèce, à quelques puissances de la vitesse que la résistance soit proportionnelle.

IX.

Algèbre des sinus et des cosinus.

S'il faut bien se garder de proscrire les problèmes spéculatifs et isolés, s'il faut laisser suivre à chacun l'impulsion de son génie, il est juste aussi d'exciter et d'accueillir avec reconnaissance la recherche des méthodes générales, ou qui s'étendent à un grand nombre de problèmes, dans les applications pratiques. Tel est l'avantage de l'algèbre des sinus et des cosinus, surtout dans l'astronomie physique. Par la combinaison des arcs, sinus, cosinus, et de leurs différentielles, on obtient des formules qui se soumettent facilement, en plusieurs cas, aux méthodes d'intégration; ce qui conduit à la solution d'une foule de problèmes que l'on serait forcé d'abandonner par la longueur ou la difficulté des calculs, si on voulait employer les arcs, les sinus et les cosinus sous leur forme ordinaire, ou même sous la forme exponentielle. Euler est le principal auteur de ce nouvel algorithme

de calcul. On a vu que dès l'année 1702, Jean Bernoulli avait remarqué que les arcs de cercle pouvaient être représentés par des logarithmes imaginaires; ce qui produisit dans la suite une multitude de beaux théorèmes sur la multiplication et la division des angles; mais on préfère aujourd'hui les formules plus simples et équivalentes qu'Euler a introduites dans cette partie de l'analyse.

X.

Méthodes d'approximation.

Lorsque dans la solution d'un problème, on est parvenu à une expression différentielle à une seule variable, ou à une équation différentielle, qui échappent aux méthodes d'intégration, on est forcé d'en demeurer là, ou de recourir aux méthodes d'approximation, lorsqu'on veut passer à la traduction numérique des formules, ce qui est toujours l'objet final des applications pratiques.

Expressions différentielles.

Dans les expressions différentielles à une seule variable, on approche du but, par les quadratures ou les rectifications des courbes, et par les séries. Les quadratures et les rectifications des courbes sont quelquefois liées ensemble, mais ordinairement elles forment des problèmes très-différens. Dans le cercle, la quadrature de la surface dépend de la rectification de la circonférence; la parabole est carrable, sa rectification dépend des logarith-

mes; la cycloïde est rectifiable, sa quadrature dépend de celle du cercle, etc. Quelquefois les quadratures et les rectifications de deux courbes différentes peuvent être rappelées les unes aux autres par des transformations de calcul : sur quoi je remarquerai, en passant, que Landen, célèbre géomètre anglais, est ainsi parvenu à convertir la formule pour la rectification de l'hyperbole, en une autre qui contient deux arcs d'ellipse et une quantité algébrique. Les approximations par les quadratures des courbes sont préférables à celles qu'on pourrait tirer des rectifications, par la raison qu'on trouve facilement l'aire approchée d'une courbe, en la décomposant en plusieurs petits trapèzes qu'on puisse considérer comme sensiblement rectilignes; au lieu qu'il n'est pas aisé de développer le contour d'une courbe en ligne droite.

Trans. phil. 1775.

Les approximations par les séries sont d'un usage encore plus commode. En développant l'expression différentielle en séries, la question n'est plus que d'intégrer des *mônômes;* mais comme il faut toujours tendre à former des séries convergentes, afin qu'en prenant un certain nombre de termes du commencement, on ait sensiblement la somme de toute la suite, cela demande que l'on transforme l'expression proposée en une autre qui produise cet avantage, ce qui est quelquefois difficile, et demande beaucoup de sagacité.

On intègre aussi par approximation les équations différentielles, qui ne peuvent pas l'être en rigueur, en formant des suites infinies, ou au moyen de la méthode des coefficiens indéterminés ou du parallélogramme de Neuton. Equations différentielles.

Indépendamment de l'utilité que je viens d'indiquer, la théorie générale des suites forme une branche considérable de l'analyse. Les Anglais, tels que Wallis, Neuton, Stirling, Maclaurin, etc., l'ont poussée très-loin. Mais personne n'y a fait d'aussi grands progrès qu'Euler; personne n'a autant sommé de suites curieuses, n'a autant appris à en former relativement à chaque question, n'a autant appliqué ce moyen à la solution d'une multitude de problèmes délicats et importans. Les recueils des académies de Pétersbourg et de Berlin, et de ses ouvrages particuliers, sont pleins de ses découvertes en ce genre, que l'on regarde comme l'un des principaux monumens de son génie.

SECTION VIII.

Suite. Progrès des méthodes pour intégrer les équations différentielles. Nouveaux pas du problème des isopérimètres. Intégrales particulières. Calcul intégral aux différences partielles.

I.

Conditions d'intégrabilité des équations différentielles.

MALGRÉ les progrès que faisait le calcul intégral des équations différentielles, il y manqua pendant plus de quarante ans la connaissance de quelque propriété générale qui pût servir à diriger les méthodes d'intégration. Depuis les problèmes des courbes *isochrones*, de la *chaînette*, etc., d'où cette théorie a commencé à prendre corps, on avait intégré un grand nombre d'équations différentielles de tous les ordres; mais autant de cas particuliers, autant de méthodes particulières : on n'arrivait souvent au but que par une espèce de tâtonnement qui pouvait bien faire admirer le génie et la sagacité de l'analyste, mais qui, après tout, ne donnait aucune ouverture pour des problèmes d'un autre genre. Les géomètres désiraient donc un signe, un caractère par lequel on pût reconnaître si une équation, dans l'état où elle

se présente, est immédiatement intégrable, ou si elle a besoin de quelque préparation pour le devenir. On sent en effet combien une telle connaissance doit épargner de fausses tentatives de calcul. L'Allemagne et la France partagent la gloire d'avoir fait cette belle découverte pour les équations différentielles du premier ordre. Euler, Fontaine et Clairaut y parvinrent chacun de leur côté, à peu près dans le même temps, ou du moins sans s'être donné mutuellement aucun secours. Cependant la justice ne permet pas de taire qu'Euler a porté les premiers coups : dans sa *Mécanique*, publiée en 1736, il emploie une équation dépendante de cette théorie ; mais il n'en a donné la démonstration que dans les mémoires de l'académie de Pétersbourg, pour l'année 1734, publiés en 1740. Or, les recherches de Fontaine et de Clairaut sont de l'année 1739 ; de sorte qu'ils ne pouvaient pas alors connaître celles d'Euler.

Tom. II, p. 49.

Ac. de Paris, 1739 et 1740.

II.

Le même Euler ayant trouvé dans la suite les conditions d'intégrabilité pour les équations différentielles des ordres plus élevés, les fit transmettre à Condorcet, mais sans y ajouter les démonstrations. Ce dernier non-seulement les découvrit par une voie très-directe et très-simple, mais il donna une nouvelle extension à cette théorie : premier

An 1765.

Condorcet, né en 1743, mort en 1794.

essai d'un grand talent pour l'analyse, auquel on regrettera éternellement que l'auteur ne se soit pas livré tout entier, tant pour son propre bonheur, que pour l'avancement des sciences. Tout le monde sait que Condorcet s'étant jeté dans les dissensions politiques de la révolution française, fut obligé de se donner la mort pour éviter l'échafaud.

III.

Problème des isopérimètres considéré dans le sens le plus étendu.

Le problème des isopérimètres, tant agité entre les frères Jacques et Jean Bernoulli, reparaissait encore de temps en temps sur la scène, soit par de nouvelles applications, soit par les tentatives que les géomètres faisaient pour en simplifier les solutions générales. Parmi ceux qui s'en sont occupés, il faut principalement distinguer Euler. Je passe sous silence ses premiers essais, imprimés dans les recueils de l'académie de Pétersbourg : je viens tout de suite à son fameux livre : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes,* publié en 1744. L'auteur distingue deux sortes de *maxima* ou de *minima,* les uns absolus, les autres relatifs. Les *maxima* ou les *minima* sont absolus, lorsque la courbe jouit sans restriction d'une certaine propriété de *maximum* ou de *minimum,* entre toutes les courbes correspondantes à une même abscisse : telle est la courbe de la plus vite descente. Les

maxima ou les *minima* sont relatifs, lorsque la courbe qui doit jouir d'une certaine propriété de *maximum* ou de *minimum*, doit de plus satisfaire à une autre condition, comme, par exemple, d'être égale en contour à toutes les courbes terminées avec elle à deux points donnés : tel est le cercle, qui a la propriété d'enfermer le plus grand espace entre toutes les courbes d'égal contour. Euler rappelle le second cas au premier, par le moyen de ce beau théorème qu'il a trouvé et démontré le premier : *si l'on multiplie les deux expressions qui représentent les deux conditions de la courbe par des coefficiens constans, et qu'on ajoute ensemble les produits, la somme peut être considérée comme un* maximum *absolu, ou comme un* minimum *absolu.* Ensuite il apprend à déterminer les coefficiens constans, par les conditions de chaque problème particulier. Son ouvrage contient une foule d'applications très-curieuses, où l'on voit briller partout la plus profonde science du calcul, et la plus grande élégance dans les solutions.

IV.

Méthode des variations.

Cependant la théorie de ce grand géomètre était assujétie à certaines considérations géométriques, dont il désirait lui-même qu'on pût la débarrasser, afin de rendre les solutions uniformes et

entièrement analytiques dans toutes leurs parties. M. Lagrange a fait ce dernier pas, par la méthode des *variations*. L'analogie qu'a cette méthode avec celle de Leibnitz pour différencier *de curvâ in curvam*, mérite d'être remarquée, et cela peut servir à bien faire comprendre ici l'esprit et l'usage de l'une et de l'autre.

Ac. de Turin, tom. II et III.

Supposons qu'on ait sous le signe *sommatoire* une expression différentielle où l'on ne considère d'abord qu'une seule variable. Cette intégrale indiquée peut être censée représenter l'aire d'une courbe *donnée*, dont la variable est l'abscisse; l'ordonnée est une fonction de cette variable, de quantités constantes quelconques, et d'un *paramètre*. Si maintenant on différencie l'intégrale, en faisant varier non-seulement l'abscisse, mais encore le paramètre, pour passer de la courbe proposée à la courbe de même nature, infiniment voisine, on aura deux termes, l'un qui est la différentielle primitive, l'autre où la différentielle du paramètre devant être traitée comme constante, de même que le paramètre, affectera une seconde quadrature ordinaire. Dans la méthode des variations, on a pareillement sous le signe d'intégration une formule différentielle; mais cette formule, relative à une courbe *inconnue*, est maintenant composée de plusieurs variables, liées entr'elles par la condition que l'intégrale doive être un

maximum ou un *minimum;* et le problème est de trouver la courbe qui satisfait à cette condition. Il faut donc faire *varier* l'intégrale, et égaler le résultat à zéro. Le signe de variation doit être ici distingué, quant à l'objet, du signe de différenciation ordinaire; mais le calcul se fait de la même manière, et suivant le même esprit, dans l'un et l'autre cas; les coefficiens différentiels qui affectent le signe de variation, se trouvent comme ceux qui affectent le signe de différenciation. De là il résulte que le signe de variation peut être transposé après les signes de différenciation : alors, en intégrant par parties, on fait disparaître les signes de variation, et on arrive à une équation générale qui, par la nature de ses différens termes, se partage en deux autres équations, l'une qui représente la courbe cherchée, l'autre qui fixe les valeurs et les positions des deux élémens extrêmes de la courbe, d'après des conditions données. M. Lagrange a expliqué, avec tout le détail nécessaire, la théorie et la pratique de ce nouveau genre de calcul, l'une des plus belles découvertes analytiques modernes.

Frappé de ces avantages, et supérieur à tous les petits mouvemens d'amour-propre d'auteur, Euler a lui-même adopté la méthode des variations pour les problèmes *de maximis et minimis;* et il l'a développée avec soin dans le volume de l'académie de Pétersbourg, pour l'année 1764, et dans un

appendice au tome III de son Calcul intégral.

Quelques années après, le même géomètre ayant envisagé cette théorie sous un nouveau point de vue, trouva le moyen de la rappeler entièrement au calcul intégral ordinaire, sans employer de nouveaux signes pour les variations; mais, en admirant toujours les ressources de son génie, on est obligé de reconnaître que cela n'a produit aucun changement essentiel dans les principes, ni aucune abréviation dans les calculs.

Ac. de Péters. 1771.

On trouve, dans le volume de l'académie des sciences de Paris, pour l'année 1767, des Mémoires de Fontaine et de Borda, sur le même sujet. Ils contiennent des remarques et des méthodes de calcul, qui peuvent intéresser les géomètres, mais qui n'ajoutent rien au fond de la question.

BORDA, né en 1732, mort en 1799.

V.

Intégrales particulières. Ac. de Paris, 1734.

Dans un mémoire *sur les courbes dont la nature est exprimée par une relation donnée entre leurs branches,* Clairaut fut conduit à des équations différentielles du premier ordre, dont la propriété est telle, qu'on y peut satisfaire par des expressions qui ne sont pas comprises dans l'intégrale complète * : il regarda comme une nouveauté

* L'intégrale complète d'une équation différentielle du premier ordre doit toujours renfermer, dans sa généra-

dans l'analyse les solutions singulières de ses équations, et surtout la manière de les trouver par la différenciation de l'équation proposée. Sans doute il ignorait que Leibnitz et Jean Bernoulli avaient considéré depuis long-temps de semblables équations. Rappelons brièvement ce qu'ils en avaient écrit.

Dès l'année 1694, Leibuitz avait remarqué, au moins implicitement, les solutions singulières, ou intégrales particulières, dans un mémoire intitulé : *Nova Calculi differentialis applicatio,* que j'ai déjà cité ci-dessus (sect. II). Ce fut à l'occasion d'un problème général sur la recherche de la courbe qui touche une suite de courbes données de nature et de position. Une question qui s'y rapporte, était de trouver une courbe telle, que la relation de la perpendiculaire en chacun de ses points, à la partie de l'axe des abscisses comprise entre l'origine des abscisses et la perpendiculaire, fût exprimée par une équation donnée. Je suppose, pour

---

lité, une constante arbitraire, qui, pouvant recevoir différentes valeurs, produit différentes intégrales, qu'Euler appelle *intégrales particulières,* mais que l'usage le plus ordinaire est d'appeler *intégrales incomplètes.* On réserve la dénomination *intégrales particulières,* pour désigner les solutions singulières qui ne sont pas comprises dans l'intégrale complète.

la plus grande clarté, que cette équation soit celle d'une parabole ordinaire. Leibnitz considère la courbe cherchée comme formée par l'intersection continuelle d'une suite de cercles qui ont tous leurs centres sur l'axe : il forme l'équation générale qui exprime la nature de tous ces cercles, et par là il a une seconde équation qui est liée avec la première par deux quantités indéterminées ; de sorte que l'on peut faire disparaître l'une de ces indéterminées, ce qui produira une troisième équation, où il ne faut considérer comme variable que la seule indéterminée restante. Alors, en différenciant suivant cette indéterminée, et divisant par la différentielle, on obtient une équation finie, qui, étant combinée avec la troisième, donne finalement l'équation de la courbe cherchée, qui est encore ici une parabole, mais posée autrement que la première. Cette équation est une intégrale particulière.

John. Bern. op. tom. III, pag. 430. Jean Bernoulli a résolu aussi le problème de Leibnitz par une méthode différente, mais qui aboutit également à une intégrale particulière. Il en est de même d'une équation différentielle que Taylor intègre par la différenciation. Meth. inc. pag. 27.

VI.

Les équations différentielles qui admettent des intégrales particulières, s'étaient présentées à Euler,

à peu près dans le même temps qu'à Clairaut, comme on peut en juger par la *Mécanique* du premier, publiée en 1736, c'est-à-dire la même année que le mémoire du second. Euler a traité depuis plus expressément le même sujet dans un mémoire particulier, et dans le tome 1 de son Calcul intégral. Les problèmes qu'il résout dans le mémoire sont relatifs à diverses propriétés des tangentes des lignes courbes, et mènent à des équations différentielles qui comportent des solutions singulières. Il trouve ces solutions par les différenciations; d'un autre côté il détermine les intégrales complètes, ce qui avait sa difficulté, et fait voir immédiatement que les intégrales particulières n'étaient pas comprises dans les intégrales complètes.

Ac. de Berlin, 1756.

Lorsque l'on peut ainsi trouver les deux sortes d'intégrales, on voit tout d'un coup si les intégrales qu'on regarde comme particulières, le sont en effet, ou si elles ne font pas partie de l'intégrale complète. Mais il y a une foule de cas où connaissant les intégrales particulières, l'imperfection de l'analyse ne permet pas de déterminer les intégrales complètes. Alors la nature des intégrales particulières était fort équivoque avant qu'Euler l'eût éclaircie. C'est ce qu'il a fait dans son *Calcul intégral*. Il y donne une méthode générale pour reconnaître *à priori*, si une expression finie, qui satisfait à une équation différentielle proposée, doit

Tom. 1, prob. 72.

faire partie ou non de l'intégrale complète, sans connaître cette intégrale. Si on trouve qu'elle n'en doit pas faire partie, on conclut qu'elle est du genre des intégrales particulières.

VII.

Il restait encore à découvrir s'il n'existait pas de liaison entre les intégrales complètes et les intégrales particulières. Avant M. Lagrange, on croyait que ces intégrales étaient absolument indépendantes les unes des autres. Il a démontré qu'elles tenaient aux mêmes principes. Par l'intégrale complète, il fait trouver immédiatement l'intégrale particulière, s'il y en a une. Ensuite il enseigne à reconnaître et à déterminer l'intégrale particulière sans le secours de l'intégrale complète. Sa théorie embrasse les équations différentielles de tous les ordres. L'auteur l'a appliquée également aux intégrales des équations aux différences partielles, dont nous parlerons tout à l'heure.

Ac. de Berlin, 1774.

Enfin M. Legendre, en s'appuyant sur les méthodes et les démonstrations de M. Lagrange, a fait voir que *les intégrales particulières sont toujours comprises dans une équation finie, où le nombre des constantes arbitraires est moindre que dans l'intégrale complète* : principe d'où il tire une méthode plus directe que celles qui étaient déjà connues, pour distinguer les

Ac. de Paris, 1790.

intégrales particulières de celles qui ne sont qu'incomplètes, et pour déduire immédiatement les premières de l'équation différentielle proposée.

VIII.

Il se fit, vers le milieu du siècle passé, une découverte analytique, dont l'utilité et les applications n'ont pas de bornes, surtout dans les sciences physico-mathématiques : je veux parler du *Calcul intégral aux différences partielles.*

Calcul intégral aux différences partielles.

L'objet général de ce calcul est de trouver une équation qui satisfasse à une équation différentielle proposée, lorsque l'on connaît seulement la relation qui existe entre les coefficiens différentiels. Supposons, par exemple, une équation différentielle du premier ordre entre trois variables. Dans le calcul intégral ordinaire, les facteurs qui affectent les différentielles, sont indépendans les uns des autres, comme si cette équation provenait immédiatement de la différenciation d'une équation finie ; et alors, quand l'équation proposée est réelle, ou représente une question possible, ce qui se connaît quand elle satisfait à l'équation générale de condition, qui doit constater la réalité de ces sortes d'équations : alors, dis-je, l'intégration s'effectue, ou exactement, ou par approximation, par les méthodes ordinaires. Mais si dans l'équation différentielle proposée, les coefficiens différentiels

sont primitivement donnés, ou s'ils ont entr'eux une relation donnée, la méthode qu'il faut employer pour trouver l'équation finie appartient au calcul intégral aux différences partielles. Cette équation renferme une fonction arbitraire de l'une des trois variables, et peut contenir de plus une constante arbitraire comprise dans la fonction. Il y aurait des fonctions arbitraires de deux variables, si l'équation différentielle primitive était du second ordre. En général, les opérations du calcul intégral aux différences partielles amènent les fonctions arbitraires, de la même manière, et en même nombre, que les intégrations ordinaires amènent les constantes arbitraires.

Ac. de Péters. 1734.

D'Alembert, né en 1717, mort en 1783.

On trouve quelques vestiges de ce nouveau calcul dans un mémoire d'Euler, que j'ai déjà cité sous la date de l'année 1734. L'ouvrage de d'Alembert, *sur la cause générale des vents,* en contient des notions un peu plus développées. Le même géomètre est le premier qui l'ait employé d'une manière explicite, en faisant un usage adroit du calcul intégral ordinaire, dans la solution générale du problème des cordes vibrantes.

Problème des cordes vibrantes, résolu par Taylor, dans un cas limité, généralisé par d'Alembert.

Taylor avait déterminé dans son livre : *Methodus incrementorum,* la courbe que forme une corde vibrante, tendue par un poids donné, en supposant, 1.° que la corde, dans ses plus grandes excursions, s'éloigne peu de la direction rectiligne

de l'axe ; 2.° que tous ses points arrivent en même temps à l'axe. Il trouva que cette courbe est une trochoïde très-allongée ; ensuite il assigna la longueur du pendule simple qui fait ses oscillations dans le même temps que la corde vibrante fait les siennes. C'était alors un problème nouveau et original. Plusieurs autres géomètres l'ont traité suivant les mêmes données. La première supposition, que les excursions de la corde de part et d'autre de l'axe demeurent toujours fort petites, est suffisamment conforme à l'état physique des choses ; d'ailleurs, elle est la seule qui donne de la prise au calcul, même dans l'état actuel de l'analyse. Quant à la seconde, que tous les points de la corde arrivent en même temps à l'axe, elle est absolument précaire, et il fallait délivrer le problème de cette limitation. D'Alembert a trouvé le premier une solution qui en est indépendante. Il a déterminé directement et *à priori* la courbe que forme à chaque instant une corde vibrante, sans faire d'autre supposition, sinon que dans ses plus grands écarts elle s'éloigne peu de l'axe. La nature de cette courbe est d'abord exprimée par une équation du second ordre, dont un membre est la différentielle seconde de l'ordonnée, prise en faisant varier seulement le temps, et supposant sa différentielle constante ; l'autre membre est la différentielle seconde de l'ordonnée, prise en faisant

Ac. de Berlin, 1747.

varier seulement l'abscisse, et supposant sa différentielle constante. De là, en satisfaisant successivement à ces deux conditions, on remonte à une équation finie, de telle nature que l'ordonnée a pour valeur l'assemblage de deux fonctions arbitraires, l'une de la somme de l'abscisse et du temps, l'autre de leur différence. On voit qu'au moyen de cette équation, deux quelconques des trois variables, l'ordonnée, l'abscisse et le temps, étant données, on connaîtra la troisième et toutes les circonstances du mouvement de la corde.

Euler, frappé de la beauté de ce problème, s'en est occupé pendant très-long-temps, et il y est revenu à plusieurs reprises dans les mémoires des académies de Berlin, de Pétersbourg et de Turin. Années 1748, 1753, 1760, etc. Malgré la conformité qui se trouvait entre les résultats des deux grands géomètres que je viens de citer, ils eurent ensemble une longue dispute sur l'étendue qu'on pouvait donner aux fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation de la corde vibrante. D'Alembert voulait que la courbure initiale de la corde fût assujétie à la loi de continuité : Euler la croyait absolument arbitraire, et introduisait dans le calcul, des fonctions discontinues. D'autres géomètres ont pensé que cette discontinuité des fonctions pouvait être admise, mais qu'elle devait être soumise à une loi, et qu'il fallait que trois points consécutifs de la courbure ini-

tiale appartinssent toujours à une courbe continue. Mais jusqu'ici il ne paraît pas que personne ait donné des preuves entièrement démonstratives de son opinion; et il ne faut pas s'en étonner. Cette question tient à des idées métaphysiques; et les problèmes de mécanique, ou de pure analyse, auxquels on a appliqué ce nouveau genre de calcul, n'ont encore fourni aucun moyen de discerner celle de ces opinions qui donnait des résultats conformes ou contraires à des vérités déjà reconnues et avouées universellement.

Sans prendre aucun parti dans cette dispute, le célèbre Daniel Bernoulli donna les plus grandes louanges aux calculs de d'Alembert et d'Euler; Ac. de Berlin, 1753. mais en même temps il entreprit de faire voir que la corde vibrante forme toujours, ou une trochoïde simple telle que la théorie de Taylor la donne, ou un assemblage de ces trochoïdes; et que toutes les courbes déterminées par d'Alembert et Euler ne pouvaient être admises, et n'étaient réellement applicables à la nature, qu'autant qu'elles étaient réductibles à une pareille forme. Cette discussion lui donna lieu d'approfondir la formation physique du son, que l'on ne connaissait alors que très-imparfaitement; il explique, par exemple, avec toute la netteté possible, comment une corde mise en vibration, ou en général un corps sonore quelconque, peut rendre à la fois

plusieurs sons différens composant un même système. Mais en admirant son adresse à simplifier le sujet, et à prêter l'appui de l'expérience à ses raisonnemens, les géomètres conviennent que sa solution est moins générale et moins parfaite que celles de ses deux rivaux. En effet, ces dernières (quelqu'étendue qu'on veuille leur attribuer) sont fondées sur un genre de calcul incontestable, et elles contiennent, comme un cas particulier, la solution générale de Daniel Bernoulli. J'en dis autant relativement au problème de la propagation du son, qui est de même nature que celui des cordes vibrantes, et auquel Euler et Daniel Bernoulli ont également appliqué chacun leurs méthodes particulières.

Les différens points de vue sous lesquels Euler a envisagé et présenté le calcul intégral aux différences partielles, ont fixé sa véritable nature, et fait connaître les applications dont il est susceptible dans une foule de problèmes physico-mathématiques. Enfin, il en a développé à fond la méthode, et donné l'algorithme, dans un excellent mémoire intitulé : *Investigatio functionum ex datâ differentialium conditione*. En conséquence, quelques géomètres regardent Euler, sinon comme le seul, au moins comme le principal inventeur du calcul dont il s'agit; mais il ne faut pas oublier que d'Alembert en a fait le premier une ap-

Ac. de Péters. 1762.

plication importante et originale, qui a donné des ouvertures à Euler, comme il en convient lui-même. S'il m'est permis de dire mon avis, je crois que ces deux hommes illustres ont à peu près un droit égal à la gloire d'une si belle découverte.

IX.

L'invention de ce calcul présente une singularité remarquable. On n'a commencé à le bien connaître, et à lui donner une forme régulière, que par une équation différentielle du second ordre, au sujet même d'un problème de mécanique. Mais enfin il s'est placé dans la chaîne naturelle des sciences analytiques : on a cherché à intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre ; et de là on a passé graduellement aux équations des ordres suivans.

Euler a tracé cette nouvelle marche dans le troisième tome de son *Calcul intégral*, publié en 1770. Il y intègre un grand nombre d'équations aux différences partielles de tous les ordres, par des méthodes qui, sans être absolument générales, embrassent des cas très-étendus. On remarque surtout, dans le chapitre premier du second livre, page 186, une transformation très-ingénieuse, dont il fait les plus belles applications. D'autres géomètres ont employé depuis le même moyen pour intégrer l'équation linéaire aux différences

partielles du second ordre, avec plus de généralité qu'on ne l'avait fait encore.

Ac. de Paris, 1770, 1771, 1772. Condorcet a proposé en divers temps plusieurs vues nouvelles sur ce calcul, et il a levé des difficultés qui s'y rencontraient; mais il s'est borné presqu'entièrement à des généralités, qui ont elles-mêmes grand besoin d'être développées et éclaircies. Sans doute quelque nouvel Œdipe parviendra à deviner ces savantes énigmes : en fera-t-il hommage à l'auteur ?

X.

Les méthodes d'Euler pour l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre, avaient l'inconvénient de n'être point liées, ou de se diversifier suivant la diversité des problèmes. M. Lagrange indiqua, en 1772, et développa, en 1779 et 1785, une méthode par laquelle il ramène au calcul intégral ordinaire l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre, entre un nombre quelconque de variables, lorsque ces différences ne sont que *linéaires*; de sorte qu'il n'y a plus alors à vaincre que les difficultés attachées à cet ancien calcul. Il applique ensuite sa méthode au fameux problème des trajectoires orthogonales, qu'il traite avec la plus grande généralité, et en l'étendant aux surfaces courbes.

Ac. de Berlin, 1772, 1779, 1785.

Nous devons ajouter qu'il avait donné, dans

le volume de l'académie de Berlin pour l'année 1772, la méthode de transformer une équation aux différences partielles du premier ordre, *non linéaire*, en une équation *linéaire*, avec une variable de plus.

XI.

Cette matière est si féconde, qu'elle a fait naître une multitude d'autres beaux ouvrages, parmi lesquels on remarque le mémoire de M. Laplace, imprimé dans le volume de l'académie de Paris, pour l'année 1773, et ceux de M. Monge, imprimés dans le tome IV des *Savans étrangers*, et dans le volume de l'académie, pour l'année 1784.

M. de Nieuport, membre de l'académie de Bruxelles, et correspondant de l'institut de France, a embrassé la totalité du calcul intégral aux différences partielles dans une suite de mémoires qu'il a publiés séparément. Aux connaissances que l'on avait déjà, et qu'il a reproduites à sa manière, avec clarté, il a joint un grand nombre de choses qui lui appartiennent.

Mélanges math. 1794, 1799.

La même justice est due à M. Trembley, membre de l'académie royale de Prusse : il a donné plusieurs excellens mémoires sur ce sujet, dans les collections de cette célèbre compagnie.

Tous ces ouvrages, et d'autres que je puis avoir omis involontairement, n'étant pas susceptibles

d'extraits, je finirai par une observation générale.

Malgré toutes ces belles recherches, le calcul intégral aux différences partielles n'est pas encore arrivé à la perfection qu'on désire. De nouveaux efforts augmenteront la science, et la gloire des inventeurs. Si à mesure qu'on avance dans une carrière hérissée de difficultés, l'empreinte des pas paraît moins étendue et moins profonde, les vrais juges en ces matières, savent proportionner leur estime à la résistance vaincue; et cette estime est la plus digne récompense que puisse ambitionner l'homme qui la mérite.

SECTION IX.

Notice de quelques principaux ouvrages relatifs à l'analyse infinitésimale.

I.

PARMI les ouvrages où j'ai puisé jusqu'ici l'histoire de l'analyse infinitésimale, il en est quelques-uns dont je n'ai fait qu'une légère mention, et qui méritent d'être un peu plus remarqués. Il en est d'autres que je n'ai pas encore eu l'occasion de citer; d'autres qui ne contenant pas des idées absolument nouvelles, sont d'ailleurs recommandables

par la clarté et la méthode, et ne doivent pas être oubliés. Enfin, il s'en trouve où l'on n'emploie que l'analyse ordinaire, et qui ont néanmoins du rapport à l'analyse infinitésimale, soit comme introduction, soit par des théories (comme par exemple celle des courbes géométriques), qui, pouvant être traitées par l'une et l'autre méthodes, donnent lieu à des comparaisons et à des rapprochemens clairs et instructifs. Je vais jeter un coup d'œil sur ces différens objets.

II.

Nous avons vu que l'*Analyse des infiniment petits*, du marquis de l'Hôpital, est le premier ouvrage où le calcul différentiel ait été expliqué en détail. Aux notions générales que j'en ai données, j'ajouterai ici qu'indépendamment de la théorie des tangentes, et de celle des *maxima* et des *minima*, qui faisaient alors le principal objet du calcul différentiel, l'auteur a résolu une foule d'autres problèmes alors très-difficiles et très-intéressans. Quelques-uns de ces problèmes étaient nouveaux; les solutions des autres avaient été données sans analyse et sans démonstrations. Le marquis de l'Hôpital dévoila tous ces mystères, et rendit par là aux sciences un des plus importans services qu'elles aient jamais reçus. Par exemple, dans les sections VI et VII, il explique, de la manière la plus

complète et la plus claire, toute la théorie des caustiques par réflexion et par réfraction, courbes fameuses que Tschirnaus avait indiquées aux géomètres, et dont Jacques Bernoulli s'était contenté d'énoncer les principales propriétés. La section VIII est employée à la recherche des lignes droites ou courbes qui touchent une infinité de lignes données, droites ou courbes : sujet curieux en lui-même, et renfermant des questions applicables à la balistique. Dans la section IX, l'auteur expose la fameuse règle pour trouver la valeur d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent en même temps. La dixième et dernière section présente le calcul différentiel sous un nouveau point de vue; d'où le marquis de l'Hôpital déduit les méthodes de Descartes et de Hudde pour les tangentes. Cet objet, traité avec la même exactitude et la même clarté que les autres, ne peut avoir aujourd'hui d'autre utilité que d'exercer les jeunes géomètres.

III.

Le marquis de l'Hôpital laissa en mourant un ouvrage manuscrit sur la théorie générale et les propriétés particulières des *sections coniques*, dont on donna une édition en 1707. Quoique cet ouvrage soit traité entièrement par l'analyse cartésienne, il mérite d'être distingué, soit par la ri-

chesse même du fond, soit parce qu'il a ouvert le champ à quelques problèmes où l'analyse infinitésimale était nécessaire. Il est compté dans le petit nombre des livres classiques.

Vers le même temps parut l'*Arithmétique universelle* de Neuton : ouvrage plein de génie, très-propre à préparer les esprits à l'étude de l'analyse infinitésimale, par la manière adroite dont l'auteur enseigne à soumettre les problèmes de géométrie au calcul, à choisir les moyens les plus simples d'arriver au but, et à écarter les solutions inutiles. M. Beaudeux, savant professeur de mathématiques, a donné, en 1802, une traduction française de cet ouvrage, écrite avec la plus grande élégance, et dans laquelle les endroits qui peuvent paraître obscurs dans un texte quelquefois trop serré, sont éclaircis et accompagnés de notes qui lèvent toutes les difficultés.

IV.

En 1708, le P. Reyneau publia son livre de l'*Analyse démontrée,* qui a été pendant longtemps de la plus grande utilité, du moins en France. L'auteur s'est proposé deux objets : l'un de démontrer et d'éclaircir plusieurs méthodes d'algèbre pure; l'autre d'exposer, suivant le même esprit, les élémens du calcul différentiel et du calcul intégral. Il s'étend peu sur le calcul différen-

tiel, suffisamment traité dans le livre du marquis de l'Hôpital; il s'est attaché principalement à enseigner les élémens du calcul intégral, qui ne faisait, pour ainsi dire, que de naître. Il a été pendant long-temps le seul guide que les commençans eussent parmi nous pour s'instruire dans les nouveaux calculs : on l'appelait quelquefois l'Euclide de la haute géométrie. Mais insensiblement, en conservant l'estime due à l'auteur, on a oublié le livre, qui a été effacé par d'autres ouvrages plus profonds et plus complets, fruit du progrès des sciences.

V.

La méthode des infiniment petits était sujette à quelques difficultés que les inventeurs, trop occupés des progrès étonnans qu'elle faisait entre leurs mains, avaient éludées, ou n'avaient pas suffisamment éclaircies. Ce n'était qu'à force de la présenter, de l'appliquer à de nouveaux usages, et de faire remarquer dans l'occasion la conformité des résultats qu'elle donnait, avec ceux des anciennes méthodes, qu'on était enfin parvenu à la faire recevoir universellement, comme aussi certaine et aussi exacte que toutes les autres théories géométriques. Cependant elle laissait encore quelques nuages dans l'esprit de ceux qui n'en pénétraient pas assez les vrais principes. Qu'on me permette de ci-

ter à ce sujet un petit trait qui me regarde. Lorsque je commençais à étudier le livre du marquis de l'Hôpital, j'avais de la peine à concevoir qu'on pût négliger absolument, sans erreur quelconque, une quantité infiniment petite, en comparaison d'une quantité finie. Je confiai mon embarras à un fameux géomètre, qui me répondit : *Admettez les infiniment petits comme une hypothèse, étudiez la pratique du calcul, et la foi vous viendra*. La foi est venue en effet : je me suis convaincu que la métaphysique de l'analyse infinitésimale est la même dans le fond que celle de la méthode d'exhaustion des anciens géomètres. FONTAINE.

VI.

On a souvent reproduit la même objection contre la prétendue inexactitude des nouveaux calculs. En 1734, il parut en Angleterre une lettre intitulée l'*Analyste*, dans laquelle l'auteur, homme d'un mérite très-distingué à d'autres égards, représentait la méthode des fluxions comme pleine de mystères, et comme fondée sur de faux raisonnemens. On ne pouvait anéantir pour toujours ces étranges imputations, qu'en établissant cette théorie sur des principes tellement certains, tellement évidens, qu'aucun homme raisonnable et instruit ne pût refuser de les admettre. Maclaurin entreprit cette tâche difficile et nécessaire. Il publia, MACLAURIN, né en 1698 ; mort en 1746.

en 1742, son *Traité des fluxions,* où il démontre les principes de ce calcul, en toute rigueur, et à la manière des anciens géomètres, qu'on n'a jamais accusés de relâchement dans le choix et la solidité des preuves. Cette méthode synthétique est un peu prolixe, et quelquefois fatigante à suivre; mais elle jette dans l'esprit une lumière et une satisfaction qu'on ne saurait acheter trop chèrement. Après avoir bien assuré sa marche, Maclaurin offre à la curiosité du lecteur une foule de très-beaux problèmes de géométrie, de mécanique et d'astronomie, dont quelques-uns sont nouveaux : tous sont résolus avec une élégance remarquable par le choix des moyens que l'auteur emploie. Il est, par exemple, le premier qui ait donné les caractères pour reconnaître si une fonction proposée peut devenir un *maximum* ou un *minimum*. Ces avantages placent le livre de Maclaurin au nombre des productions de génie qui honorent l'auteur et l'Ecosse sa patrie. On l'a traduit dans notre langue; et plusieurs mathématiciens français, devenus célèbres dans la suite, l'ont pris pour guide dans leurs études de la nouvelle géométrie.

En donnant ainsi à cet excellent ouvrage tous les éloges qu'il mérite, en reconnaissant que Maclaurin a contribué plus que personne à nourrir le feu sacré de l'ancienne géométrie parmi les Anglais, qui se font un point d'honneur particulier de le

conserver soigneusement; nous ne pouvons pas dissimuler que même à l'époque où le traité des fluxions parut, la partie analytique en était incomplète à plusieurs égards. Cependant l'analyse, à laquelle il ne faut pas donner une prédilection exclusive, est la véritable clef de tous les grands problèmes de mécanique et d'astronomie physique, qu'on tenterait vainement de résoudre par la synthèse. Il était donc à désirer qu'on rassemblât en corps de doctrine usuelle toutes les découvertes dont les géomètres avaient enrichi et continuaient d'enrichir la science analytique.

VII.

Cette gloire était réservée à Euler. Outre qu'il a étendu et perfectionné toutes les parties de l'analyse dans les innombrables mémoires qui existent de lui parmi ceux des académies de Pétersbourg et de Berlin, et dans plusieurs autres recueils, il a publié à ce sujet des ouvrages particuliers, spécialement adaptés à l'instruction des lecteurs de tous les ordres. Un des premiers et des plus importans est le livre; *Methodus inveniendi lineas curvas maximâ minimâve proprietate gaudentes*, dont j'ai donné une notion suffisante. A la suite de ce traité, on trouve une savante théorie de la courbure des lames élastiques, et un mémoire où l'auteur détermine, par la méthode *de maximis et*

minimis, le mouvement des projectiles dans un milieu non résistant : première application importante de cette méthode à la classe des problèmes de mécanique susceptibles de solutions par la théorie des causes finales.

Bientôt après, Euler publia une suite d'ouvrages qui embrassent toute l'analyse infinitésimale. Celui qui a pour titre : *Introductio in analysim infinitorum*, contient en deux livres les connaissances d'analyse pure et de géométrie, nécessaires pour la parfaite intelligence des calculs différentiel et intégral. L'auteur explique dans le premier tout ce qui regarde les fonctions algébriques ou transcendantes, leurs développemens en séries, la théorie des logarithmes, celle de la multiplication des angles, la sommation de plusieurs suites très-curieuses et d'une profonde recherche, la décomposition des équations en facteurs trinômes, etc. Dans le second livre, l'auteur commence par établir les principes généraux de la théorie des courbes géométriques et de leur division en ordres, classes et genres; ensuite il applique en détail ces principes aux sections coniques, dont toutes les propriétés sont ici déduites de leur équation générale. Il finit par une théorie très-élégante des surfaces des corps géométriques : il apprend à trouver les équations de ces surfaces, en les rapportant à trois coordonnées perpendiculaires entr'elles; il les

divise en ordres, classes et genres, comme il a fait pour les simples courbes tracées sur un plan, etc. Tous ces objets sont traités avec une clarté et une méthode qui en facilitent l'étude, au point que tout lecteur médiocrement intelligent peut les suivre de lui-même et sans aucun secours étranger.

Enfin, Euler a rassemblé en cinq ou six volumes *in-4.°* toute la science du calcul différentiel et du calcul intégral. Les richesses de l'art auparavant connues, un plus grand nombre de théories absolument nouvelles, sont ici présentées et développées de la manière la plus lumineuse et la plus instructive, et sous cette forme originale et commode que l'auteur a fait prendre à toutes les parties des hautes mathématiques. La réunion de ces divers traités compose le plus vaste et le plus beau corps de science analytique que l'esprit humain ait jamais produit. Tous les géomètres qui ont été à portée de lire ces ouvrages, y ont puisé des connaissances, et quelques-uns même se sont fait honneur des méthodes qu'on y trouve. Si le P. Reyneau a pu être appelé un moment, et par exagération, l'Euclide de la haute géométrie, on peut dire avec vérité qu'Euler est cet Euclide, et même ajouter qu'il est très-supérieur à l'ancien, par l'étendue et la force du talent.

Le génie et la fécondité de cet homme extraordinaire tiennent véritablement du prodige. Pen-

dant tout le cours de sa vie; les journaux et les recueils des académies sont pleins de ses recherches : il publie de plus séparément une foule d'ouvrages brillans de sagacité et d'invention. En mourant, il a laissé plus de cent excellens mémoires manuscrits, qui forment un des plus beaux ornemens des derniers volumes de l'académie de Pétersbourg.

VIII.

Cramer, né en 1704, mort en 1752.

Je ne dois pas oublier de citer avec distinction Cramer parmi les bienfaiteurs de la nouvelle géométrie. Son *Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques* est le traité le plus complet qui existe sur cette matière. L'auteur ne laisse rien à désirer sur la théorie des branches infinies des courbes, sur leurs points multiples, et en général sur tous les symptômes qui servent à les caractériser. Il était contemporain de Daniel Bernoulli et d'Euler, élève comme eux de Jean Bernoulli. Il a fort approché de tous ces grands hommes. On lui doit un excellent *Commentaire* sur les œuvres de Jacques Bernoulli.

IX.

Le Seur, mort en 1770. Jacquier, mort en 1788.

En 1768, les PP. minimes Le Seur et Jacquier publièrent un *Traité de calcul intégral*: ouvrage un peu prolixe et manquant quelquefois de méthode, mais dans lequel on trouve cependant plu-

sieurs choses nouvelles et intéressantes, comme, par exemple, un développement très-clair du traité *des Quadratures* de Neuton.

La méthode d'éliminer les inconnues, ou de réduire les équations d'un problème au plus petit nombre possible, est une partie essentielle de l'analyse. Plusieurs géomètres s'en sont occupés. Cramer l'avait déjà fort étendue et fort simplifiée. Bezout en a fait l'objet d'un savant traité, où il a porté la matière beaucoup plus loin qu'elle ne l'avait été.

BEZOUT, né en 1730, mort en 1783.

Cousin s'est principalement distingué dans les sciences par un *Traité de calcul intégral*, auquel on reproche cependant un peu d'obscurité et de désordre, mais qui contient d'ailleurs des choses nouvelles sur les différentes branches du sujet, et en particulier sur l'intégration des équations aux différences partielles.

COUSIN, né en 1739, mort en 1801.

Je ne finirais point, si je voulais faire ici le recensement de tous les ouvrages élémentaires qui ont paru, surtout depuis quelques années, sur l'analyse infinitésimale. Comme ils sont spécialement destinés à l'instruction de la jeunesse, et que leur principal mérite doit consister dans la méthode et la clarté, ils ne peuvent être bien appréciés que par ceux qui sont obligés, ou de les enseigner, ou de les étudier, et je n'en parlerai pas.

X.

Tout est mode, même dans les sciences; mais tous les changemens ne sont pas heureux. L'analyse est aujourd'hui la méthode dominante, et presque la seule qu'on emploie dans toutes les parties des mathématiques; elle est très-utile; il y a des problêmes dont la solution lui est exclusivement réservée; mais souvent elle ne sert qu'à couvrir le vide d'idées, et à multiplier les livres, sans augmenter la science. On remarque néanmoins de temps en temps des ouvrages où le calcul, conduit par le génie, est un simple instrument et non pas un ornement. Telle est la *Géométrie de position*, que M. Carnot, membre de l'institut de France, publia en 1805, et à laquelle il joignit, en 1806, un supplément intitulé: *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points pris dans l'espace*.

On sait que Leibnitz avait conçu l'idée d'une *Analyse de situation*, qui ne fut pas alors développée. « Il voulait, dit M. Carnot, qu'on fît entrer dans l'expression des conditions d'un pro-
» blême géométrique, la diversité de position des
» parties correspondantes des figures comparées,
» afin qu'en les séparant par un caractère bien dis-
» tinctif, on pût les isoler plus facilement dans le
» calcul. Or, cette division de positions s'exprime

» par de simples mutations de figures; et c'est pré» cisément la théorie de ces mutations qui fait » l'objet des relations que j'ai en vue, et que j'ap» pelle *géométrie de position* ».

La méthode de M. Carnot consiste à former d'abord le tableau ou l'énumération de toutes les parties qui entrent dans la composition des figures dont on veut rechercher les propriétés, et à exprimer ensuite algébriquement toutes ces parties en valeurs de quelques-unes seulement d'entr'elles, prises pour termes de comparaison. Ce tableau est donc proprement celui de la figure elle-même, sous une forme analytique. Rien n'est plus facile, après cela, que de changer les données, c'est-à-dire les quantités prises pour termes de comparaison. De cette manière, on parvient sans peine à découvrir des propriétés nouvelles, et à épuiser en quelque sorte celles de chaque figure proposée.

L'auteur considère ensuite cette figure comme graduellement changeante; il cherche quelles sont les modifications que doivent éprouver les premières formules trouvées, à mesure que cette figure variable s'éloigne de sa forme primitive, et il fait voir que ces variations se manifestent par des changemens de signe successifs dans les formules; ce qui le conduit à discuter la nature des quantités négatives isolées. On sait que si en cherchant la solution d'un problème algébrique, on obtient

pour l'inconnue une valeur négative, la règle est de prendre cette valeur, abstraction faite de son signe, dans un sens contraire à celui qu'on lui avait attribué dans la mise en équation. Mais ce précepte est vague, et M. Carnot en a fixé le sens d'une manière précise et générale, en prouvant que dans ce cas l'inconnue n'obtient une valeur négative que parce qu'elle exprime la différence de deux autres quantités, dont la plus grande a été prise pour la plus petite, et la plus petite pour la plus grande, dans la mise en équation : observation juste, qui prévient toute difficulté, en écartant comme inutile la notion métaphysique des quantités négatives isolées.

Le même ouvrage contient les élémens d'une autre théorie aussi originale que curieuse, et l'auteur l'appelle *Théorie des transversales* : il désigne par ce nom de transversale toute ligne soit droite, soit courbe, qui traverse un système quelconque de lignes droites, et il découvre entre les segmens de ces dernières, des rapports singuliers par le moyen desquels on parvient à résoudre, d'une manière simple et élégante, des problèmes souvent très-compliqués. L'auteur montre ensuite comment cette théorie s'étend à un système de lignes droites qui ne seraient pas dans un même plan, et à un système de grands arcs de cercle, tracés sur la sur-

face d'une sphère, en prenant successivement pour transversale chacun de ces arcs.

On voit par ce précis combien le champ de problèmes que M. Carnot s'est ouvert, est étendu et fécond.

XI.

En approfondissant les différentes branches de la science analytique, on reconnaît qu'elles ont entr'elles une liaison nécessaire, et qu'elles partent toutes d'un même tronc. Cependant il est quelquefois fort utile de les considérer séparément. Nous avons un grand exemple de cette utilité dans la naissance et les progrès de l'analyse infinitésimale. Leibnitz fit de ce calcul une science isolée et particulière, qu'il fonda sur des principes et sur un algorithme, extrêmement simples : double avantage, très-propre à exciter l'esprit d'invention, et à faire naître de grandes découvertes ; ce qui arriva effectivement. D'abord l'hypothèse des quantités infiniment petites, qu'on prenait dans le sens naturel du mot, fut vivement attaquée ; mais les succès de la méthode étouffèrent la voix de ses adversaires, et on continua de résoudre, par ce moyen, les plus beaux et les plus difficiles problèmes. Les choses étaient depuis long-temps dans cet état, lorsque M. Lagrange, qui a lui-même tant contribué aux progrès de cette nouvelle analyse, est venu

renouveler l'ancienne objection, dans un essai imprimé parmi les mémoires de l'académie de Berlin pour l'année 1772, et ensuite dans un ouvrage particulier, imprimé pour la première fois en 1798, et réimprimé en 1806, sous le titre de *Leçons sur le calcul des fonctions*. Il n'a pas eu l'intention de renverser l'édifice; il a voulu, au contraire, l'affermir sur des fondemens inébranlables, en dégageant le calcul différentiel de la métaphysique des quantités infiniment petites, ou *évanouissantes*, et en le rappelant immédiatement à la théorie générale des fonctions, sur l'exactitude de laquelle on ne peut élever aucun doute.

Le mot de *fonction*, dans sa signification la plus étendue, telle que M. Lagrange l'emploie, désigne une quantité formée, suivant une loi donnée, d'une ou de plusieurs quantités données. En ce sens, l'algèbre peut être regardée comme une branche de la théorie des fonctions, puisque la résolution d'une équation ne consiste en général qu'à trouver les valeurs des quantités inconnues, en fonctions déterminées des quantités connues.

Les fonctions que l'on considère dans le calcul équivalent à l'analyse infinitésimale, contiennent deux espèces de quantités, les unes constantes et *déterminées*, les autres variables et *indéterminées*, en nombre quelconque.

Supposons d'abord une fonction où il n'entre

(outre les quantités constantes et données) qu'une seule variable, et concevons que cette variable augmente d'une certaine quantité, prise arbitrairement : la fonction primitive se changera en une autre qu'on pourra développer, par les principes de l'algèbre, en une série qui contienne les puissances successives de l'accroissement, affectées de coefficiens qui sont des fonctions de la variable primitive, et que M. Lagrange appelle *fonctions dérivées*. Par un nouvel accroissement de la variable primitive, ces fonctions en produisent d'autres de la même manière; ainsi de suite successivement : de sorte que ce système de fonctions dérivées n'a point de bornes. M. Lagrange détermine les lois suivant lesquelles se forment toutes ces fonctions dérivées; et ces lois produisent des formules analogues à celles du calcul différentiel, mais fondées sur des opérations analytiques, de même nature que les calculs algébriques ordinaires.

Lorsque la fonction primitive contient plus d'une variable, on trouve successivement, et de proche en proche, les fonctions dérivées, en ne considérant à la fois qu'une seule variable, et opérant comme on vient de l'indiquer. Ces expressions répondent à celles du calcul aux différences partielles.

Si l'on a une équation quelconque entre plusieurs variables, on peut passer successivement aux

quantités dérivées, et remonter de celles-ci aux équations primitives. On voit que ces transformations sont analogues aux *différenciations* et aux *intégrations*; mais, dans la théorie des fonctions, elles ne dépendent que d'opérations fondées sur les simples principes de l'algèbre ordinaire.

M. Lagrange, après avoir établi les bases de sa théorie, en vient aux applications. Il commence par les fonctions où il n'entre qu'une seule variable : il démontre, d'une manière rigoureuse, la formule du binôme pour tous les cas; les propriétés des quantités circulaires et logarithmiques; il détermine les tangentes des lignes courbes; les quadratures de leurs espaces, leurs rectifications, etc. La partie qui se rapporte à l'intégration des équations différentielles, est traitée avec le même soin, et l'auteur lève plusieurs difficultés qu'on rencontre dans l'usage du calcul infinitésimal. Enfin, il fonde sur la même théorie les principes et les démonstrations du *Calcul des variations*, dont il est l'inventeur, et les équations fondamentales de la mécanique.

Cet ouvrage a tout à la fois le mérite d'enrichir l'analyse de plusieurs nouveautés intéressantes, et de présenter aux jeunes géomètres un flambeau à la lueur duquel ils pourront s'enfoncer désormais dans cet immense labyrinthe, sans crainte de s'y égarer.

CHAPITRE II.

Progrès de l'analyse ordinaire.

I.

Lorsque Leibnitz eut publié les principes de l'analyse infinitésimale, les géomètres les saisirent avec avidité, et ne s'occupèrent, pour ainsi dire, pendant l'espace de cinquante ans, qu'à les développer et à résoudre des problèmes qui en dépendent. L'analyse ordinaire fut alors fort négligée. Cependant on sentit à la fin qu'elle avait besoin d'être perfectionnée, et qu'elle offrait un champ fécond de recherches utiles. Plusieurs géomètres célèbres en firent donc l'objet d'un travail suivi et heureux. On sait qu'elle se divise en deux branches : l'analyse *déterminée* ou l'algèbre proprement dite, et l'analyse *indéterminée*, qui comprend la théorie des nombres. Je commence par celle-ci, comme ayant été promue la première.

II.

Analyse indéterminée.

Viète avait résolu quelques problèmes curieux concernant les propriétés des nombres. Bachet de Méziriac donna une solution très-simple, en nom-

bres entiers, de l'équation générale indéterminée du premier degré, dans la seconde édition de son livre des *Problèmes plaisans et délectables*, publiée en 1624. La grande réputation de Fermat est fondée en partie sur ses recherches arithmétiques, dont j'ai promis de parler sous cette période : je vais le faire brièvement.

Les nombres n'étant en général que des rapports avec l'unité de numération, on a souvent besoin, même dans la pratique ordinaire de l'arithmétique, de savoir si ces rapports sont simples ou composés, c'est-à-dire, si un nombre est *premier*, ou n'a d'autres diviseurs que lui-même et l'unité, ou bien s'il est composé par la multiplication de plusieurs autres nombres. Mais indépendamment de cette utilité primordiale, la recherche des propriétés des nombres est d'un grand intérêt pour les géomètres, à raison des difficultés qu'elle offre à vaincre, et de la singularité de plusieurs résultats.

Fermat s'était fort occupé de cette théorie; et on trouve dans ses œuvres une foule de beaux théorèmes arithmétiques. Malheureusement la plupart sont énoncés sans démonstrations, soit que l'auteur voulût laisser aux autres géomètres le plaisir de chercher ces démonstrations, soit qu'il ne les possédât pas lui-même, et qu'il ne fût parvenu que par induction aux résultats qu'il annonçait. Il paraît qu'à sa mort ses écrits sur les nom-

bres furent dispersés en grande partie; ce qui a causé une perte très-difficile à réparer.

Parmi ces nombreux théorèmes, il y en a un fort remarquable, dont il n'a pas laissé la démonstration, mais qu'Euler a suppléée. Il consiste en cette proposition générale : supposons un nombre *premier* quelconque P, et un autre nombre A non divisible par P : le nombre A élevé à une puissance dont l'exposant est moindre d'une unité que P, produit un nombre qui, étant diminué de l'unité, donne un reste divisible par P. Par exemple, supposons les deux nombres 3 et 4, qui ont la condition requise : le nombre 4 élevé à la puissance 2, produit 16, qui, étant diminué de 1, donne 15, nombre divisible par 3. Autre exemple : soient les deux nombres 7 et 10, qui ont aussi la condition requise : le nombre 10 élevé à la puissance 6, produit 1000000, qui, étant diminué de 1, donne 999999, nombre divisible par 7.

Ac. de Péters. 1736.

Fermat eut avec les Anglais, et en particulier avec Wallis, une dispute où il mit en avant une proposition générale qui s'est trouvée fausse; ce qui ne fut pas remarqué alors, mais ce qui l'a été dans la suite par Euler. La question était ainsi proposée : étant donné un nombre (quelque grand qu'il puisse être), assigner d'une manière sûre et sans tâtonnement, un nombre premier qui le surpasse. Fermat crut avoir trouvé la solution de ce

Ac. de Péters. 1732.

problème par le moyen des puissances carrées du nombre 2 : il affirma que ces puissances produisaient toujours des nombres qui, augmentés de l'unité, étaient des nombres premiers. Sans doute il avait formé cette assertion, d'après les puissances carrées du commencement de la suite, où elle a lieu en effet : car la puissance 0 de 2 (qu'on peut regarder comme une puissance carrée), est 1, qui, augmenté de 1, donne 2, nombre premier; la puissance deuxième de 2 est 4, qui, augmenté de 1, donne 5, nombre premier; la puissance quatrième de 2 est 16, qui, augmenté de 1, donne 17, nombre premier; la puissance huitième de 2 est 256, qui, augmenté de 1, donne 257, nombre premier; la puissance seizième de 2 est 65536, qui, augmenté de 1, donne 65537, nombre premier. Mais plus loin cette loi ne se soutient plus : la puissance trente-deuxième de 2 est 4294967296, qui, augmenté de 1, donne 4294967297, qui n'est plus un nombre premier, étant composé des deux facteurs 641 et 6700417, comme on peut le vérifier par le calcul.

Non-seulement Euler a restitué et perfectionné les recherches de Fermat sur les nombres, il a de plus enrichi cette théorie de plusieurs nouvelles découvertes. Il a étendu, par des moyens qui tiennent à la même théorie, les méthodes pour la transformation de diverses quantités radicales en

quantités rationnelles; ce qui est de la plus grande utilité dans les problèmes des quadratures des courbes. Voyez son *Traité d'algèbre*, et un grand nombre de mémoires qu'il a publiés sur ce sujet parmi ceux de l'académie de Pétersbourg, depuis l'année 1732.

M. Lagrange est venu ensuite, et on peut bien penser qu'il a encore enrichi cette théorie. Il a (Ac. de Berlin, 1747. Additions à l'algèbre d'Euler.) donné le premier des méthodes générales pour résoudre, soit en nombres entiers, soit en nombres simplement fractionnaires, les équations indéterminées du second degré. On n'a pas été plus loin (Ac. de Berlin, 1771.) dans la résolution générale des équations indéterminées. On lui doit la démonstration d'un très-beau théorème arithmétique, dont on ne connaissait que l'énoncé, trouvé sans doute par induction: ce théorème est que, si l'on fait le produit continuel de tous les nombres qui précèdent un nombre *premier* P, et qu'au nombre résultant on ajoute l'unité, la somme sera toujours divisible par P. Prenons, par exemple, le nombre *premier* 5: le produit continuel de 1 par 2, par 3, par 4, donne 24, à quoi, ajoutant 1, on a 25 qui est divisible par 5. Autre exemple: supposons le nombre *premier* 7: le produit continuel de 1 par 2, par 3, par 4, par 5, par 6, donne 720, à quoi ajoutant 1, on a 721 qui est divisible par 7. Cette propriété n'a pas lieu pour un nombre qui n'est

pas premier : et cela fournit un caractère facile pour reconnaître si un nombre proposé est premier ou non. M. Lagrange donne les moyens d'abréger les calculs que demande l'usage de ce théorème.

Comme cette matière est, pour ainsi dire, inépuisable, M. Legendre s'y est aussi distingué, d'abord par un mémoire imprimé parmi ceux de l'académie de Paris, pour l'année 1785, ensuite par un ouvrage particulier, intitulé : *Théorie des nombres,* imprimé pour la première fois en 1799, et réimprimé en 1808, dans lequel l'auteur a joint aux théories déjà connues, plusieurs nouvelles propriétés des nombres.

Enfin M. Gauss, fameux géomètre de Brunswick, a traité ce sujet dans la plus grande étendue, et d'une manière originale, dans un ouvrage latin, intitulé : *Disquisitiones arithmeticæ,* publié en 1802, et traduit en français en 1807, par M. Poullet de Lisle, savant professeur de mathématiques au lycée d'Orléans. On distingue principalement dans cet ouvrage la section VII, où l'auteur examine les propriétés des équations qui déterminent les sections circulaires. On savait depuis longtemps diviser géométriquement la circonférence du cercle en divers nombres de parties égales, comme 3, 4, 5, 6, 10, etc. M. Gauss a trouvé, par la résolution des équations binômes, qu'on

pouvait diviser de même la circonférence en un grand nombre d'autres parties égales, comme, par exemple, en 17, ce qui n'était pas connu.

III.

La résolution des équations littérales, qui fait le fond de l'algèbre considérée en elle-même, est demeurée jusqu'ici au terme où Tartaglia et Cardan l'ont poussée, c'est-à-dire bornée aux quatre premiers degrés. On a bien résolu un grand nombre d'équations particulières, dans tous les degrés suivans; on a imaginé divers artifices de calcul, qui abrègent les opérations, et qui donnent aux résultats la forme la plus simple; mais on n'a point encore trouvé de méthode par laquelle on puisse assigner en général, et sous la forme littérale, les racines d'une équation du cinquième degré, ni des degrés plus élevés. Analyse déterminée. Equations littérales.

En 1683, Tschirnaus proposa une méthode qui sembla d'abord promettre la résolution générale: elle consiste à faire disparaître tant de termes intermédiaires qu'on voudra, d'une équation quelconque; ce qui rappellerait le problème à la résolution d'une équation à deux termes, et par conséquent au but désiré. Elle réussit très-bien, quoiqu'avec un peu de longueur, pour le troisième et le quatrième degrés; mais, quand on veut passer aux degrés suivans, on est conduit à des équations Act. Lips.

résolvantes, qui, quoique particulières, sont tellement compliquées, que l'auteur, ni aucun autre analyste, n'a pu en déterminer les racines.

Cette tentative infructueuse fit abandonner le problème pour un temps considérable. Il y a environ cinquante ans qu'Euler et Bezout entreprirent de le résoudre : leurs méthodes reviennent à la même quant au fond; et ils ont été également conduits à des équations *résolvantes,* qui paraissent intraitables.

Ac. de Péters. 1762.
Ac. de Paris, 1765.

M. Lagrange a examiné et discuté toutes ces méthodes avec le plus grand soin; il en a fait connaître les avantages et les inconvéniens. La conclusion de ses remarques est qu'on ne peut guère espérer d'en tirer jamais la solution générale du problème.

Ac de Berlin, 1770 et 1771.

IV.

Équations numériques.

Si la résolution des équations littérales de tous les degrés, est à désirer pour la perfection théorique de l'algèbre, elle ne l'est pas pour les applications particulières à des exemples : car alors l'équation ne contient finalement que l'inconnue, et des coefficiens numériques, donnés par la nature du problème; or, quelqu'élevées que puissent être ces équations, qu'on appelle *équations numériques,* on a des méthodes pour les résoudre immédiatement, au moins par approximation; et on est

dispensé de recourir à la traduction numérique des expressions littérales des racines. Il y a plus : quand on connaîtrait ces expressions, la traduction deviendrait souvent impraticable ou de nul usage. Par exemple, si on voulait traduire en nombres les expressions littérales des racines d'une équation du troisième degré, qui renferme le cas irréductible, on ne pourrait faire disparaître les imaginaires que par des séries compliquées, et souvent très-peu convergentes. On résout ce cas particulier par la trisection de l'angle, et quelques autres par des moyens semblables. Mais en général on est obligé de recourir aux méthodes que j'ai annoncées, et dont il faut maintenant donner quelqu'idée.

Viète avait proposé un moyen par lequel on pouvait approcher des racines de plusieurs sortes d'équations d'une manière analogue à l'extraction de la racine carrée ou cube; mais ce moyen était sujet à des longueurs et à des tâtonnemens incertains qui l'ont fait abandonner.

Neuton a donné une méthode beaucoup plus simple, applicable aux équations de tous les degrés, et pendant long-temps presque la seule qu'on ait mise en usage. Il suppose d'abord qu'on ait une première valeur approchée de l'inconnue, par exemple, à un dixième près; ensuite il substitue dans l'équation proposée, à la place de l'inconnue,

sa valeur approchée, plus une inconnue très-petite; et traitant, comme des quantités sensiblement négligeables, les termes qui contiennent le carré et les puissances supérieures de la petite inconnue, il obtient cette inconnue par la résolution d'une équation du premier degré. Cette opération lui donne une seconde valeur approchée de l'inconnue primitive; il fait de cette seconde valeur le même usage que de la première; ainsi de suite; de sorte que par un certain nombre de semblables calculs, il trouve pour l'inconnue primitive une valeur qui peut approcher de très-près de la véritable.

Cette méthode est fort simple, comme on voit; mais elle est sujette à quelques inconvéniens que M. Lagrange fait remarquer dans son *Traité de la résolution des équations numériques*, imprimé pour la première fois en 1798, et réimprimé en 1808. Ces inconvéniens sont, 1.° qu'elle suppose une opération préliminaire qui fasse connaître la première valeur de l'inconnue. 2.° Qu'elle n'est pas toujours sûre; car, en négligeant à chaque opération des termes dont on ne connaît pas la valeur, il est impossible de juger du degré d'exactitude de chaque nouvelle correction; et il peut arriver, dans les équations qui contiennent des racines presque égales, que la série soit très-peu convergente, ou qu'elle devienne même divergente, après avoir été

convergente. 3.° Qu'elle ne donne que des valeurs approchées des racines mêmes qui peuvent être exprimées exactement en nombres, et laissent par conséquent en doute si elles sont commensurables ou non.

A cette méthode, M. Lagrange en substitue une autre, évidente dans les principes, et menant certainement au but, sauf la longueur des calculs qu'elle exige quelquefois, mais qu'il faut supporter, quand on veut résoudre un problème avec cette exactitude qu'on doit mettre, autant qu'il est possible, dans les sciences mathématiques. Il s'est donc proposé ce problème général sur la résolution des équations numériques. *Etant donnée une équation numérique sans aucune notion préalable de la grandeur, ni de l'espèce de ses racines, trouver la valeur numérique exacte, s'il est possible, ou aussi approchée qu'on voudra de chacune de ses racines.*

La méthode de M. Lagrange attaque l'équation d'une manière immédiate, et sans qu'il soit d'abord nécessaire de chercher à l'abaisser. Mais dans la pratique du calcul, il faut tâcher de simplifier et de faciliter la question, le plus qu'il est possible. On fera donc disparaître les coefficiens fractionnaires, s'il y en a; on délivrera l'équation des diviseurs commensurables et des racines égales qu'elle peut contenir; on peut aussi changer les racines

négatives d'une équation en positives. Toutes ces opérations préliminaires s'exécutent par des moyens aisés et connus depuis long-temps. Ainsi il ne s'agira plus que de savoir résoudre des équations numériques qui contiennent, ou des racines réelles inégales positives, ou des racines imaginaires, ou des racines en partie réelles inégales positives, en partie imaginaires.

Lorsque toutes les racines de l'équation ainsi préparée sont réelles, et sensiblement inégales, on peut les déterminer successivement par approximation, et d'une manière fort simple, au moyen du théorème suivant, connu depuis long-temps : que si, en substituant dans l'équation proposée, à la place de l'inconnue, deux nombres différens, qui donnent, pour la totalité des termes de l'équation, des résultats de signes contraires ; il y aura toujours au moins une racine comprise entre les deux nombres substitués. En resserrant de plus en plus l'intervalle de ces deux nombres, par la transformation de l'équation primitive en une autre, dont les racines soient dix fois, ou cent fois, ou, etc., plus grandes, on arrivera à des expressions qui feront connaître la racine cherchée avec tel degré d'approximation qu'on voudra. Mais lorsque toutes les racines de l'équation primitive, ou seulement quelques-unes sont presqu'égales, l'application du théorème précédent est sujette à des tâ-

tonnemens longs, même incertains, quand on n'a pas la patience ou le courage de pousser les transformations aussi loin qu'il serait nécessaire pour obtenir des résultats de signes contraires. M. Lagrange obvie à cet inconvenient, en apprenant à former une autre équation (qu'on peut appeler *auxiliaire*), dont les racines sont les carrés des différences des racines de l'équation primitive, et à déterminer ensuite la plus petite limite des racines de cette équation auxiliaire; la racine carrée de cette limite sera moindre que la plus petite différence entre les racines de la proposée; et il est clair que si l'on substitue d'abord ce nombre, puis son double, son triple, etc., à la place de l'inconnue, dans la proposée, on obtiendra nécessairement des résultats de signes contraires, ce qui fera connaître les limites de ses racines.

Ces limites une fois trouvées, M. Lagrange approche de plus en plus des véritables valeurs, par le moyen des fractions continues, dont personne, avant lui, n'avait fait cet usage.

En supposant que les racines de l'équation primitive soient réelles, il est évident que toutes les racines de l'équation auxiliaire sont réelles et positives; d'où il suit, par la règle de Descartes, que les termes de cette équation doivent être alternativement positifs et négatifs. Si cette condition n'a pas lieu, on sera sûr que l'équation primitive

contient des racines imaginaires. Et comme les racines imaginaires vont toujours deux à deux, et que chaque couple forme une équation du second degré, le carré de la différence des deux racines de cette équation est toujours une quantité négative ; d'où l'on voit que si l'équation proposée contient des racines imaginaires, il faudra nécessairement que l'équation auxiliaire ait au moins autant de racines réelles négatives qu'il y aura de couples de racines imaginaires dans l'équation primitive. Or, d'un autre côté, M. Lagrange démontre qu'une équation quelconque ne saurait avoir plus de racines positives qu'elle n'a de changemens de signes, ni plus de racines négatives qu'elle n'a de successions du même signe. Ainsi, le nombre des racines imaginaires dans une équation quelconque, ne pourra jamais être plus grand que le double de celui des successions de signe dans l'équation auxiliaire. De toutes ces propositions, il suit que si l'équation auxiliaire a tous ses termes alternativement positifs et négatifs, l'équation primitive aura nécessairement toutes ses racines réelles, sinon elle aura des racines imaginaires.

M. Lagrange applique sa théorie générale à des exemples : il détermine, d'une manière certaine, les racines réelles, et les quantités réelles qui entrent dans les expressions des racines imaginaires,

en abrégeant, autant qu'il est possible, les calculs indispensablement nécessaires.

Cet ouvrage ne laisse rien à désirer sur la résolution générale des équations numériques; mais on voit toujours avec plaisir les méthodes qui, dans certaines classes d'équations, font connaître les racines avec toute la simplicité qu'on peut espérer.

Telle est la méthode de M. Budan, dans un très-beau mémoire qu'il fit paraître sur ce sujet en 1803. Il résout les équations qui contiennent des racines réelles, par des transformations très-ingénieuses et très-abrégées qui lui appartiennent.

CHAPITRE III.

Progrès de la Mécanique.

I.

Principes de l'équilibre.

Depuis Archimède, à qui l'on doit le principe général de l'équilibre du levier, on cherchait à y rappeler de gré ou de force les conditions de l'équilibre de toutes les machines simples ou composées. Mais cette méthode, quelquefois fort indirecte, entraînait alors des longueurs ou de l'obscurité dans les applications.

Varignon en trouva une autre plus simple et plus commode, dans la loi générale des mouvemens composés, déjà connue, mais restée stérile en quelque sorte, ou presque bornée au seul usage que Galilée en avait fait pour déterminer le mouvement des projectiles dans le vide. Le principe du mouvement composé est que si deux forces, dont les directions concourent en un point, sont telles qu'en agissant séparément, elles fissent parcourir dans le même temps, à un corps, les côtés d'un parallélogramme construit sur leurs directions, leur action conjointe fera parcourir la diagonale. Or, dans l'état d'équilibre, on représente les deux forces concourantes par leurs effets vir-

tuels, c'est-à-dire par les côtés du parallélogramme dont je viens de parler; et par conséquent leur résultante est représentée par la diagonale. Ainsi, en opposant à cette force résultante une force qui lui soit égale et contraire, elle fera nécessairement équilibre aux deux forces primitives. C'est ainsi que Varignon détermina les conditions générales de l'équilibre pour toutes les machines simples, à quoi il joignit quelques applications particulières, dans un petit traité publié en 1687, sous ce titre : *Projet d'une nouvelle mécanique*.

Le succès de cet ouvrage engagea l'auteur à développer davantage ses idées : travail long et pénible, dont il fit sa principale occupation pendant plus de trente ans, et qui ne parut qu'en 1725, trois ans après sa mort. Je dois ajouter, pour l'honneur de la vérité, que cette *nouvelle mécanique* est d'une diffusion accablante par la multitude de corollaires, et de réflexions souvent très-minutieuses, que l'auteur accumule avec une sorte de plaisir; mais ce défaut a du moins pour but d'obvier à toutes les difficultés que les plus médiocres géomètres pourraient rencontrer dans les applications de la théorie à la pratique.

Varignon a joint à sa mécanique deux petits traités curieux qui s'y rapportent, et sur lesquels je m'arrêterai un moment : l'un contient l'explication et l'usage du principe des vitesses virtuelles, qu'il

tenait de Jean Bernoulli (nouv. méc. tom. II, pag. 174); l'autre est l'examen de ces machines, appelées *machines sans frottemens*, que Claude Perrault avait proposées dans son commentaire sur Vitruve, et qu'il regardait comme plus avantageuses que les machines ordinaires.

Principes des vitesses virtuelles.

Qu'on ait en général un système quelconque de corps tirés ou poussés par des puissances qui se font équilibre : si l'on imprime un petit mouvement à ce système, de sorte que tous ses points parcourent dans le même temps des petits espaces qu'on nomme leurs *vitesses virtuelles*; le produit de chaque puissance multipliée par la vitesse particulière du point où elle est appliquée, forme l'*énergie* de cette puissance ; et la somme de toutes ces énergies sera égale à zéro, en soustrayant des énergies dans un sens les énergies dans le sens contraire. Varignon fait voir que par cette propriété on trouve les mêmes lois d'équilibre pour les machines, que par la composition et décomposition des forces. Il est entré sur ce sujet dans plusieurs détails intéressans, mais néanmoins imparfaits à certains égards.

Machines sans frottemens.

Les machines sans frottemens de Perrault se réduisent toutes dans le fond à ce seul cas : un cylindre ou *rouleau* sert d'essieu à une grande roue en forme de poulie ; ce rouleau, auquel pend le poids qu'il faut élever, est soutenu par deux *ca-*

bles attachés au haut d'une grue, de manière que ces cordes, et celle du fardeau, s'entortillent nécessairement autour du rouleau, dès que la puissance appliquée à la roue l'oblige de tourner. Or, il est évident que tout cela s'exécute sans frottement; mais Varignon fait voir que par la position désavantageuse de la puissance relativement au poids, ces machines font perdre plus de force qu'on n'en perd par le frottement dans les machines ordinaires. D'où il conclut que celles-ci doivent être préférées. Ses réflexions sont non-seulement utiles dans ce cas particulier; elles peuvent encore servir, en d'autres occasions, à se prémunir contre les effets apparens de certaines machines, et à les discuter soigneusement suivant les lois de la mécanique, avant de les faire exécuter.

Du reste, on doit ici rendre à Claude Perrault la justice de dire que si son mécanisme n'est pas convenable dans la pratique, il est du moins très-ingénieux; et surtout il ne faut pas oublier que l'auteur s'est immortalisé, d'un autre côté, par la colonnade du Louvre.

II.

En 1695, La Hire donna un *Traité de Mécanique*, qui a pour objet général, comme la mécanique de Varignon, l'équilibre des machines, et qui contient de plus diverses applications curieu- LA HIRE, né en 1656, mort en 1718.

ses, et utiles aux arts, dans lesquels l'auteur était très-versé.

Cet ouvrage est accompagné *d'un traité des épicycloïdes, et de leur usage dans la mécanique*. La Hire fait voir que les dents des roues destinées à transmettre le mouvement par des engrenages, doivent être formées en courbes *épicycloïdales*, dont il détermine les propriétés et les dimensions. Cette théorie est très-belle, et devrait faire un grand honneur à La Hire, si elle lui appartenait effectivement; mais Leibnitz, dans son
Tom. 1, pag. 347. commerce de lettres avec Jean Bernoulli, l'attribue d'une manière formelle à Roemer, qui la lui avait communiquée pendant qu'ils étaient ensemble à Paris, bien long-temps avant que La Hire fût de l'académie, et qu'il eût produit quelqu'ouvrage de ce genre. A ce grave témoignage se joint l'invraisemblance, que La Hire, connu d'ailleurs pour un médiocre géomètre, ait pu faire une pareille découverte. En effet, on ne remarque aucun trait de génie dans sa mécanique : au contraire, on y rencontre un paralogisme grossier (et peut-être n'est-il pas le seul), au sujet du *tautochronisme* de la cycloïde. L'auteur voulant prouver dans sa proposition CXX (ce qu'on savait déjà par les démonstrations de Huguens), que *les corps qui tombent dans une cycloïde renversée, et dont l'axe est vertical, arrivent à son sommet dans*

le même temps, de quelque hauteur que ce soit qu'ils tombent, fait des raisonnemens qui le conduisent à une conclusion vraie, mais par des faussetés qui se redressent mutuellement. Il trouve que le temps de la chute par la demi-cycloïde renversée est double du temps de la chute par le diamètre vertical du cercle générateur : proposition fausse, ainsi qu'il aurait pu s'en convaincre par les démonstrations de Huguens, desquelles il résulte que le premier temps est au second, comme la demi-circonférence du cercle est au diamètre. Le paralogisme de La Hire vient d'avoir pris pour base, que si l'on a une suite de *proportions quelconques,* la somme de tous les premiers antécédens est à la somme de tous les premiers conséquens, comme la somme de tous les seconds antécédens est à la somme de tous les seconds conséquens; ce qui n'est vrai que dans le seul cas où toutes les proportions, d'ailleurs *quelconques,* sont composées de rapports *égaux.*

III.

Il a paru un très-grand nombre d'autres traités de mécanique statique : mon plan ne me permet pas d'en donner l'analyse; une simple nomenclature serait inutile. Je me contenterai de citer la mécanique de Camus, comme un ouvrage fort estimable par la clarté et la rigueur des démonstra- CAMUS, né en 1699, mort en 1768.

tions. L'auteur expose, entr'autres objets, toute la théorie des roues dentées, avec beaucoup d'exactitude et de méthode. Il n'était pas un géomètre bien profond; mais il avait l'esprit très-juste et très-exercé à la méthode synthétique des anciens, dont il faisait avec raison le plus grand cas. Il a résolu, par cette voie, le problème de mettre en équilibre, entre deux plans inclinés, une baguette chargée d'un poids en un endroit quelconque de sa longueur. Ce problème est très-facile à la vérité par la méthode analytique; mais il conduit à un calcul un peu long. La solution synthétique de Camus mérite attention par sa simplicité et son élégance : avantage que la synthèse a quelquefois sur l'analyse, et qu'il ne faut pas négliger dans l'occasion.

IV.

La description des machines inventées depuis environ un siècle, en se bornant même aux plus ingénieuses ou aux plus utiles, demanderait un grand ouvrage à part. Si elle était de mon sujet, je n'oublierais pas la machine à feu, qu'on doit mettre au premier rang des productions du génie des mécaniques. Disons seulement que cette machine a pour force mouvante la vapeur de l'eau alternativement dilatée et condensée, et que son mouvement s'opère par des moyens mécaniques à peu près de même nature que ceux des montres ou

des horloges. Il paraît que la force de la vapeur de l'eau n'a commencé à être connue que par les expériences du duc de Worcester, en Angleterre, vers l'an 1660. Ensuite Papin, médecin français, ayant approfondi davantage la nature de cet agent par son fameux *digesteur,* construisit, en 1698, la première machine à feu qu'on ait vue : elle était très-imparfaite; mais elle fit naître celle du capitaine Saveri, qui est fort supérieure, et qui a été suivie elle-même de plusieurs autres encore plus parfaites. Aujourd'hui, il existe des machines à feu dans tous les pays de l'Europe, pour divers services. Je reprends la théorie générale de la mécanique.

V.

Depuis que l'on avait commencé d'appliquer le principe du mouvement composé à l'état d'équilibre, on ne s'était pas avisé d'examiner si cette application était bien permise en toute rigueur. Daniel Bernoulli ne trouvant pas assez de liaison et d'évidence dans le passage d'un cas à l'autre, démontra la proposition du parallélogramme des forces pour l'équilibre, d'une manière immédiate et indépendante de toute considération du mouvement composé. Plusieurs autres géomètres, et en particulier d'Alembert, l'ont également démontrée par diverses méthodes, plus ou moins simples. Par malheur, toutes ces démonstrations sont trop

Ac. de Péters. 1726.

longues, trop embarrassantes pour pouvoir trouver commodément place dans les traités élémentaires de statique; mais du moins elles existent dans les écrits des géomètres, comme les garans multipliés d'une vérité dont on a d'ailleurs la preuve par d'autres moyens plus faciles et plus à la portée des commençans.

En faisant l'histoire de l'analyse infinitésimale, j'ai parlé des problèmes de la chaînette, de la voile enflée par le vent, de la courbe élastique, etc. A la naissance de l'académie de Pétersbourg, Daniel Bernoulli, Euler, Herman, etc., reproduisirent et résolurent ces problèmes, en leur donnant plus d'extension, plus de généralité, et augmentant par là leur difficulté.

Ac. de Péters. 1728.

VI.

Principes du mouvement.

La théorie générale des mouvemens variés ouvrit un champ nouveau et immense de problèmes aux recherches des géomètres. Galilée avait fait connaître les propriétés du mouvement rectiligne, uniformément accéléré; Huguens avait considéré le mouvement curviligne; il s'était élevé par degrés à la belle théorie des *forces centrales* dans le cercle, laquelle s'applique également au mouvement dans une courbe quelconque, en regardant toutes les courbes comme des suites infinies de petits arcs de cercle, conformément à l'idée qu'il en avait

Horol. oscil. ad finem.

donnée lui-même dans sa théorie générale des développées.

D'un autre côté, les lois de la communication des mouvemens, ébauchées par Descartes, portées plus loin par Wallis, Huguens et Wren, avaient fait un nouveau pas très-considérable, par la solution que Huguens donna du fameux problème des *centres d'oscillation*.

Toutes ces connaissances, d'abord isolées et en quelque sorte indépendantes les unes des autres, ayant été rappelées à un petit nombre de formules générales, simples et commodes, au moyen de l'analyse infinitésimale, la mécanique prit un vol qui ne peut être arrêté que par les difficultés attachées encore à l'imperfection de l'instrument. Tâchons de nous en faire quelqu'idée.

On peut ranger tous les problèmes du mouvement sous deux classes. La première comprend les propriétés générales du mouvement d'un corps *isolé* (par où j'entends un *point physique*, ou un corps dont la masse est infiniment petite), sollicité par des forces quelconques; la seconde, les mouvemens qui résultent de l'action et de la réaction que plusieurs corps, infiniment petits ou finis, exercent les uns sur les autres, d'une manière quelconque.

Deux classes de mouvemens.

VII.

Mouvement d'un corps isolé.

Dans le mouvement isolé, nous observons que la matière étant indifférente par elle-même pour le repos et le mouvement, un corps mis en mouvement devrait y persévérer uniformément, et que sa vitesse ne peut augmenter ou diminuer que par l'action instantanée d'une force constante ou variable. De là résultent deux principes : celui de la force d'inertie et celui du mouvement composé, sur lesquels est fondée toute la théorie du mouvement rectiligne ou curviligne, constant, ou variable suivant une loi quelconque. En vertu de la force d'inertie, le mouvement à chaque instant est essentiellement rectiligne et uniforme, abstraction faite de toute résistance, de tout obstacle ; par la nature du mouvement composé, un corps soumis à l'action d'un nombre quelconque de forces qui tendent toutes à la fois à changer la quantité et la direction de son mouvement, prend dans l'espace un chemin tel qu'au dernier instant il arrive au même endroit où il serait arrivé, s'il avait obéi successivement, en toute liberté, à chacune des forces proposées.

Mouvement rectiligne, variable.

En appliquant le premier de ces principes au mouvement rectiligne, uniformément accéléré, on voit, 1.° que dans ce mouvement, la vitesse croissant par degrés égaux, ou proportionnelle-

ment au temps, la force accélératrice doit être constante, ou donner des coups sans cesse égaux au mobile; et que par conséquent la vitesse finale est comme le produit de la force accélératrice par le temps; 2.° chaque espace élémentaire parcouru étant comme le produit de la vîtesse correspondante par l'élément du temps, l'espace total parcouru est comme le produit de la force accélératrice par le carré du temps. Or, ces deux mêmes propriétés ont également lieu pour chaque élément d'un mouvement variable quelconque; car rien n'empêche de regarder en général la force accélératrice, quoique variable d'un instant à l'autre, comme constante pendant la durée de chaque instant, ou comme ne recevant ses variations qu'au commencement de chacun des élémens du temps. Ainsi, dans tout mouvement rectiligne, variable suivant une loi quelconque, l'incrément de la vîtesse est comme le produit de la force accélératrice par l'élément du temps; et la différentielle seconde de l'espace parcouru est comme le produit de la force accélératrice par le carré de l'élément du temps.

Si maintenant on joint à ce principe celui du mouvement composé, on parviendra à la connaissance de tout mouvement curviligne. En effet, quelles que soient les forces appliquées à un corps qui décrit une courbe quelconque, on peut, à chaque instant, réduire toutes ces forces à deux Mouvement curviligne.

seulement, l'une tangente, l'autre perpendiculaire à l'élément de la courbe. Alors, la première produit un mouvement instantané rectiligne, auquel s'applique le principe de la force d'inertie; la seconde a pour expression le carré de la vitesse actuelle du corps, divisé par le rayon du cercle osculateur, conséquemment à la théorie des forces centrales dans le cercle; ce qui rappelle également au même principe le mouvement dans le sens du rayon osculateur.

VIII.

Tels sont les moyens qu'on a employés pendant long-temps pour déterminer les mouvemens des corps isolés, animés de forces accélératrices quelconques, en quantités et en directions. Neuton a suivi cette méthode : il a seulement enveloppé ses solutions d'une synthèse qui, sous les apparences de la simplicité et de l'élégance, cache souvent les plus grandes difficultés.

Phoronomie de Herman.

En 1716, Herman entreprit d'expliquer, dans un traité de *Phoronomie,* tout ce qui regarde la mécanique, tant des corps solides que des corps fluides, c'est-à-dire, la statique, la science du mouvement des corps solides, l'hydrostatique et l'hydraulique. Cette multitude d'objets ne lui a pas permis de les développer avec l'étendue et la clarté nécessaires. D'ailleurs, il affecte, comme Neuton,

d'employer, autant qu'il lui est possible, la méthode synthétique; ce qui rompt souvent la chaîne et l'ensemble des problèmes. Ajoutez que l'auteur s'est trompé en quelques endroits.

La *Mécanique* d'Euler, publiée en 1736, contient toute la théorie du mouvement rectiligne ou curviligne d'un corps isolé, soumis à l'action de forces accélératrices quelconques, dans le vide, ou dans un milieu résistant. L'auteur a suivi partout la méthode analytique; ce qui, en rappelant toutes les branches de cette théorie à l'uniformité, en facilite d'autant plus l'intelligence, qu'Euler manie d'ailleurs le calcul avec une sagacité et une élégance dont il n'y avait pas encore d'exemple. Non-seulement il résout une foule de problèmes difficiles, dont quelques-uns étaient alors nouveaux, mais il perfectionne l'analyse même, par des intégrations neuves et délicates, auxquelles son sujet donne lieu. Quant aux principes de mécanique pour mettre les problèmes en équations, il emploie ceux que j'ai indiqués ci-dessus. Mécanique d'Euler.

IX.

Quoique cette manière de poser la base du calcul fût assez commode, on pouvait parvenir encore plus simplement au même but; c'était de décomposer à chaque instant les forces et les mouvemens en d'autres forces et d'autres mouvemens,

Simplification des principes du mouvement.

parallèles à des lignes fixes, de position donnée dans l'espace. Alors il ne s'agissait plus que d'appliquer à ces forces et à ces mouvemens les équations du principe de la force d'inertie, et on n'avait pas besoin de recourir au théorème de Huguens. Cette idée simple et heureuse, dont Maclaurin a le premier fait usage dans son *Traité des Fluxions*, a jeté un nouveau jour sur la mécanique, et a singulièrement facilité la solution de divers problèmes. Lorsque le corps se meut toujours dans un même plan, on prend seulement deux axes fixes, qu'on suppose perpendiculaires entr'eux, pour la plus grande simplicité; mais quand il est obligé, par la nature des forces, de changer continuellement de direction en tous sens, et de décrire une courbe à double courbure, il faut employer trois axes fixes, perpendiculaires entre eux, ou formant les arrêtes d'un parallélipipède rectangle.

X.

Il y a des questions qui paraissent demander la décomposition des mouvemens, et où cependant on peut se dispenser d'y recourir : alors il ne faut pas manquer de profiter de cet avantage; car une solution directe, quand elle n'est pas d'ailleurs trop compliquée, est toujours préférable à celles où l'on emploie des moyens étrangers et auxiliaires.

N'ayant pas en ce moment sous la main d'autre exemple d'une telle simplification, j'en tirerai un de mon *Traité de Mécanique,* où j'ai démontré directement, et sans faire aucune décomposition de mouvemens, ce théorème général, que si dans un système quelconque de corps, tous ces corps décrivent semblablement, et dans le même temps, des lignes droites, situées ou non situées dans un même plan, le centre de gravité de tout le système décrira semblablement, et dans le même temps, une ligne droite, ou demeurera en repos. Je dois néanmoins ajouter que Camus a aussi démontré la même propriété dans ses élémens de Statique, en évitant la décomposition des mouvemens; mais il divise les espaces parcourus par les corps en parties infiniment petites, suivant une proportion particulière qui, quoique permise, limite la rigueur et la généralité de la démonstration.

Deuxième partie, liv. I, chap. V.

L'auteur d'une nouvelle géométrie estimée m'a fait l'honneur d'y insérer mon lemme fondamental, sans me citer.

XI.

Communication des mouvemens.

Les problèmes de la communication des mouvemens, appelés ordinairement *problèmes de Dynamique,* demandaient de nouveaux principes. Voici quelques exemples de ces problèmes: DÉTERMINER les mouvemens qui résultent de la per-

cussion mutuelle de plusieurs corps; le centre d'oscillation d'un pendule composé; les mouvemens de plusieurs corps enfilés par une même baguette à laquelle on imprime un mouvement de rotation autour d'un point fixe; etc. Or, il est visible que dans ces sortes de cas, les mouvemens ne sont pas les mêmes que si les corps étaient libres et isolés, mais qu'il doit se faire entre les corps d'un système une répartition de forces, telle que les mouvemens perdus par quelques-uns de ces corps soient gagnés par les autres. Le mouvement perdu ou reçu s'estime toujours par le produit de la masse par la vitesse perdue ou reçue, soit que les communications, ou les pertes de mouvement, s'opèrent à chaque instant par degrés finis, comme dans le choc des corps durs, ou qu'à chaque instant les vitesses ne changent que par degrés infiniment petits, comme dans les mouvemens de plusieurs corps enfilés par une baguette mobile, et généralement dans tous les cas où les forces agissent à la manière de la pesanteur.

XII.

Lorsque Huguens donna sa solution du problème des centres d'oscillation, quelques mauvais géomètres l'attaquèrent dans les journaux. Jacques Bernoulli la défendit, et entreprit de la démontrer immédiatement par le principe du levier.

Act. Lips. 1686.

Il ne considéra d'abord que deux poids égaux, attachés à une verge inflexible et sans pesanteur, mobile autour d'un axe horizontal : ayant ensuite observé que la vitesse du poids le plus voisin de l'axe de rotation doit être nécessairement moindre, et qu'au contraire celle de l'autre poids doit être plus grande, que si chaque poids agissait séparément sur la verge, il conclut que la force perdue et la force gagnée se font équilibre, et que par conséquent le produit d'une masse par la vitesse qu'elle perd, et le produit de l'autre masse par la vitesse qu'elle gagne, doivent être réciproquement proportionnels aux bras de levier. Le fond de ce raisonnement lumineux était exact. Seulement Jacques Bernoulli se méprit d'abord, en ce qu'il considérait les vitesses des deux corps comme étant finies, au lieu qu'il aurait dû considérer les vitesses élémentaires, et les comparer avec les vitesses élémentaires produites à chaque instant par l'action de la pesanteur. Le marquis de l'Hôpital remarqua cette méprise, et en la rectifiant, il trouva, sans s'écarter d'ailleurs du principe de Jacques Bernoulli, le centre d'oscillation des deux poids. Voulant ensuite passer à un troisième poids, il *réunit* les deux premiers à leur centre d'oscillation, et il combina ce nouveau poids avec le troisième, comme il avait combiné ensemble les deux premiers ; ainsi de suite. Mais la *réunion* proposée

Hist. des ouv. des Sav. 1690.

était un peu précaire, et ne pouvait être admise sans démonstration. Le mémoire du marquis de l'Hôpital ne produisit donc d'autre avantage que d'engager Jacques Bernoulli à revoir sa première solution, à la perfectionner et à l'étendre à un nombre quelconque de corps. Tout cela fut exécuté successivement. D'abord Jacques Bernoulli commença par réformer sa première solution, et par ébaucher la solution générale : enfin, il résolut complètement le problème, quels que fussent le nombre et la position des corps élémentaires du système. Sa méthode consiste à décomposer, pour un instant quelconque, le mouvement de chaque corps, en deux autres mouvemens, l'un que le corps prend réellement dans l'instant suivant, l'autre qui doit être détruit ; et à former des équations qui expriment les conditions de l'équilibre entre les mouvemens perdus. Par là le problème est rappelé aux lois ordinaires de la statique. L'auteur applique son principe à plusieurs exemples ; il démontre rigoureusement, et de la manière la plus évidente, la proposition que Huguens avait employée pour base de sa solution. A la suite de ce mémoire remarquable, il fait voir, par les mêmes principes, que le centre d'oscillation et le centre de percussion d'un système quelconque de corps sont placés en un même point.

Act. Lips. 1691.

Mém. de l'ac. de Paris, 1703.

Cette solution du problème des centres d'oscil-

lation paraissait ne laisser rien à désirer; cependant, en 1714, Jean Bernoulli et Taylor ramenèrent encore ce problème sur la scène, et ils en donnèrent des solutions qui étaient absolument les mêmes, quant au fond; conformité qui excita entr'eux la plus vive dispute : ils s'accusèrent réciproquement de plagiat. Dans cette nouvelle manière de traiter la question, on suppose qu'à la place des poids élémentaires dont le pendule est composé, on substitue en un même point d'autres poids, tels que leurs mouvemens d'accélération angulaire et leurs momens par rapport à l'axe de rotation soient les mêmes, et que le nouveau pendule oscille comme le premier. En avouant que cette solution mérite des éloges, tous les géomètres conviennent aujourd'hui qu'elle n'est pas aussi lumineuse, ni aussi simple que celle de Jacques Bernoulli, immédiatement fondée sur les lois de l'équilibre.

Autres solutions du problème des centres d'oscillation.

Ac. de Paris, et trans. phil.

XIII.

Nous avons vu que Leibnitz estimait les forces des corps en mouvement par les produits des masses et des carrés des vitesses. Jean Bernoulli ayant adopté cette opinion, donna au principe de Huguens, pour le problème des centres d'oscillation, le nom de *principe de la conservation des forces vives*, qui est resté, parce qu'en effet, dans les mouvemens d'un système de corps pesans, la

Notion et usage du principe de la conservation des forces vives.

somme des produits des masses par les carrés des vitesses demeure la même, lorsque les corps descendent conjointement, et lorsqu'ils remontent ensuite séparément avec les vitesses qu'ils ont acquises par la descente. Huguens lui-même en avait fait brièvement la remarque, dans une lettre sur le premier mémoire de Jacques Bernoulli et sur celui du marquis de l'Hôpital. Cette loi s'observe également dans le choc des corps parfaitement élastiques, et dans tous les mouvemens des corps qui agissent les uns sur les autres par des forces de *pression* : elle dérive nécessairement de la nature de ces mouvemens, et elle est indépendante de tout système sur la mesure des forces vives. Aussi les géomètres du siècle passé l'ont-ils mise en usage avec succès dans une foule de problèmes de dynamique.

Hist. des ouv. des Sav. 1690.

La variété de ces problèmes a fait imaginer plusieurs autres principes ingénieux, celui des *tensions,* la quantité constante de mouvement circulatoire autour d'un point fixe, la puissance virtuelle qu'a un système de corps, dérangé de l'état d'équilibre, pour s'y rétablir, etc., lesquels employés avec choix, suivant l'espèce de chaque problème particulier, abrègent plus ou moins le calcul, et simplifient la solution. Voyez le premier recueil des *Opuscules* d'Euler, les mémoires de l'académie de Paris, 1741, 1742, 1747, etc., ceux

de l'académie de Berlin 1745, et plusieurs autres ouvrages qu'il serait trop long d'indiquer en détail.

XIV.

Dynamique de d'Alembert.

Cependant cette diversité de moyens était quelquefois embarrassante, par l'incertitude où l'on se trouvait sur le meilleur choix à faire pour chaque cas particulier ; et on désirait une méthode générale, uniforme, et indistinctement applicable à tous les problèmes de dynamique. Celle que Jacques Bernoulli avait employée dans le problème des centres d'oscillation, était douée foncièrement de ce précieux avantage ; mais il fallait la développer et la généraliser ; il fallait en faire l'application à des exemples choisis et difficiles. D'Alembert remplit parfaitement le vœu des géomètres à cet égard, dans son *Traité de Dynamique*, publié en 1743. Qu'on donne une impulsion quelconque à un système de corps qui agissent et réagissent les uns sur les autres : par les conditions de l'équilibre qui doit avoir lieu entre les mouvemens que les corps perdent ou gagnent en vertu de leurs actions et réactions mutuelles, d'Alembert fait connaître les mouvemens que ces corps conserveront dans l'instant suivant. Tous les problèmes de dynamique sont ainsi réduits à de simples problèmes de statique. Quelques géomètres jaloux ont cherché à dé-

priser la dynamique de d'Alembert, en disant que Jacques Bernoulli en avait posé la base; mais cette base existait depuis quarante ans, et personne, avant d'Alembert, n'avait élevé l'édifice.

XV.

Axes principaux de rotation.

La dynamique a fait en divers temps plusieurs acquisitions très-importantes : telle est, par exemple, la théorie des axes principaux de rotation d'un corps. Pour en donner une idée suffisante, reprenons les choses d'un peu haut.

Acad. de Pétersbourg. 1737.

Daniel Bernoulli et Euler avaient considéré le mouvement que doit prendre un corps poussé ou tiré par une force qui ne passe pas par son centre de gravité. Dans cette hypothèse, le mouvement est *mixte*. 1.° Le centre de gravité du corps se meut exactement de la même manière, que si la direction de la force passait par ce point. 2°. Le corps tourne autour du centre de gravité, de la même manière que si ce point était fixe. Développons un peu cette loi.

Quelles que soient la figure et les dimensions du corps, le mouvement du centre de gravité est toujours le même, pour une même force, à quelque distance qu'elle passe de ce point; mais le mouvement de rotation dépend tout à la fois des dimensions du corps et de la distance à laquelle la force (toujours supposée la même), passe du cen-

tre de gravité. Si l'on fait passer un plan par le centre de gravité et par la direction de la force, et que ce plan partage le corps en deux parties égales et semblables, la rotation sera simple; elle se fera et se perpétuera autour d'un axe passant par le centre de gravité, et perpendiculaire au plan dont je viens de parler; mais si les deux parties du corps ne sont pas égales et semblables, la rotation sera *composée;* elle formera une espèce de *pirouettement* autour du centre de gravité. Quant au mouvement progressif du centre de gravité, il sera le même dans tous les cas.

En réfléchissant sur la nature du *pirouettement*, on a reconnu qu'il pouvait être regardé comme un mouvement résultant de trois mouvemens qui se font autour de trois axes perpendiculaires entr'eux, et passant par le centre de gravité : ces trois axes s'appellent *axes principaux de rotation*. Or, pour que chaque axe conserve toujours sa même position, il faut que toutes les forces centrifuges des particules du corps autour de cet axe, se fassent mutuellement équilibre. Telle est donc la condition qui doit être remplie, et qui, étant exprimée analytiquement, mène à une équation du troisième degré, dont les racines sont réelles, et par conséquent indiquent trois axes principaux de rotation.

Je suppose, dans tout ce que je viens de dire, que le corps n'a reçu, pour un instant, qu'une

seule impulsion, qui peut d'ailleurs provenir ou d'une force simple ou de l'action simultanée de plusieurs forces concourantes en un même point; je fais abstraction des mouvemens que d'autres forces subséquentes pourraient produire.

On juge, par un petit écrit, que Segner, membre de l'académie de Berlin, publia, en 1755, sous ce titre : *Specimen Theoriæ turbinum,* qu'il a eu le premier l'idée des axes principaux de rotation. Cette théorie a été développée et appliquée à divers problèmes par Jean-Albert Euler, dans sa pièce sur l'arrimage des navires, qui partagea le prix de l'académie de Paris en 1761, et par son père Léonard Euler, dans les mémoires de l'académie de Berlin, pour l'année 1760.

J. A. EULER, né en 1734, mort en 1800.

Le même Euler (le père) a traité complètement la théorie du mouvement des corps solides de grandeurs quelconques, dans son ouvrage intitulé : *Theoria motûs corporum solidorum seu rigidorum,* Rostock, 1765. La partie des axes principaux de rotation y est expliquée dans le plus grand détail, et de la manière la plus simple. L'auteur considère aussi les mouvemens de rotation par rapport à des axes qui passent par le centre de gravité, mais non principaux, et à d'autres axes qui ne passent pas par ce point. Parmi tous ces axes, il apprend à connaître ceux autour desquels *les momens d'inertie,* dans chaque espèce, sont des

maxima ou des *minima*. Lorsque le corps est soumis continuellement à l'action de forces accélératrices, ses mouvemens éprouvent des variations qu'Euler soumet également au calcul.

MM. d'Alembert et Lagrange ont aussi donné de très-belles recherches sur ce sujet : le premier, dans les tomes I et V de ses *Opuscules mathématiques*; le second, dans sa pièce *sur la libration de la lune*, qui remporta le prix de l'académie de Paris, en 1764.

XVI.

Il manquait un supplément au traité de dynamique de d'Alembert : c'était un moyen facile et uniforme d'exprimer les conditions de l'équilibre entre les mouvemens perdus et gagnés, ou en général entre un nombre quelconque de forces qui se font mutuellement équilibre. M. Lagrange a trouvé ce moyen dans le principe des vitesses virtuelles. Il en avait fait usage dans sa pièce sur la libration de la lune, pour trouver les équations générales du mouvement de la lune autour de son centre de gravité. En 1788, il fonda une nouvelle *Mécanique analytique*, sur le même principe. Les formules générales qu'il donne renferment d'abord toutes les conditions de l'équilibre entre un nombre quelconque de forces qui se combattent mutuellement. Et comme la détermination des mouvemens résul-

tans de l'action réciproque que les corps d'un même système exercent les uns sur les autres, est rappelée aux lois de l'équilibre, on voit qu'on a maintenant une méthode générale et uniforme pour résoudre tous les problèmes de dynamique.

XVII.

Les principes de la mécanique, quoique très-simples en eux-mêmes, peuvent être envisagés sous différens points de vue. De là sont nés dans ces derniers temps plusieurs ouvrages très-intéressans. Je distingue d'abord dans ce nombre le traité que M. Carnot publia en 1805, sous ce titre: *Principes généraux de l'équilibre et du mouvement.*

Dès l'année 1783, l'auteur avait fait paraître un opuscule intitulé: *Essai sur les machines en général,* qu'il a reproduit avec des additions considérables, sous le titre que je viens de rapporter.

Dans cet ouvrage, M. Carnot prend pour base le principe des vitesses virtuelles, qu'il généralise, en substituant à ces vitesses, qui sont infiniment petites, des vitesses finies, qu'il nomme *géométriques*, parce qu'on peut les déterminer par la géométrie seule, et indépendamment des règles de la dynamique. En partant de cette notion, l'auteur démontre rigoureusement le principe des vitesses virtuelles, étendu au cas des changemens brus-

ques; et il en déduit cette proposition : « Dans le » choc d'un nombre quelconque de corps durs, » soit que ce choc soit immédiat, soit qu'il se fasse » par le moyen d'une machine quelconque sans » ressorts, la somme des produits de chacune des » masses par le carré de la vitesse qu'elle perd par » le choc, est un *minimum* » : principe qui, dans tous les cas, suffit pour déterminer les effets du choc des corps durs, et qui, avec quelques modifications, s'étend aux corps doués d'un degré quelconque d'élasticité ».

Parmi les autres propositions nouvelles contenues dans le même ouvrage, en voici une très-remarquable : « Dans le choc des diverses parties » d'un système de corps durs, soit que ce choc se » fasse immédiatement, ou par l'entremise d'une » machine quelconque sans ressorts, la somme des » forces vives avant le choc est égale à la somme » des forces vives après le choc, plus la somme des » forces vives qui aurait lieu, si chacun des corps » se mouvait librement, avec la seule vitesse qu'il a » perdue par le choc ».

XVIII.

Je citerai encore les *Élémens de Statique* de M. Poinsot, professeur de mathématiques aux lycées de Paris : ouvrage publié en 1803, et qui, sous ce simple titre, renferme les principes pour

résoudre les problèmes de la mécanique transcendante.

L'auteur commence par établir en rigueur la composition de deux forces parallèles qui agissent dans le même sens; d'où il déduit une démonstration très-simple du parallélogramme des forces. Ensuite il forme une nouvelle théorie, qu'il nomme la *théorie des couples,* expression par laquelle il entend le système de deux forces égales, parallèles et de sens opposés : la mesure d'un couple est le produit de l'une des forces par leur distance. L'action d'un couple ne peut être contrebalancée que par celle d'un autre couple semblable et contraire. M. Poinsot tire de toute cette théorie les lois générales de l'équilibre, et la composition des momens qui, dans la dynamique, répondent aux aires projetées par les rayons vecteurs sur des plans fixes. On trouve surtout l'application de ces mêmes principes à la mécanique transcendante, dans un mémoire que l'auteur a fait imprimer parmi ceux de l'école polytechnique. On y remarque ce théorème nouveau et très-curieux, que dans tout système de forces, il existe un axe central par rapport auquel la somme des momens de toutes les forces est en même temps un *maximum* relativement aux autres axes qui passent par le centre, et un *minimum* relativement aux axes qui donneraient des *maxima* de momens pour tout autre point de l'espace.

CHAPITRE IV.

Progrès de l'Hydrodynamique.

I.

LE principe d'égale pression suffit, avec le secours de la géométrie, pour résoudre tous les problèmes qui dépendent de l'équilibre des fluides, et j'en rapporterai dans la suite quelques exemples importans. Ici je ne considère que le mouvement des fluides. Cette partie de l'hydrodynamique est sujette à de très-grandes difficultés. Malgré tous leurs efforts, les géomètres n'ont pas encore pu trouver des formules qui, au mérite de l'exactitude, joignissent l'avantage d'être facilement applicables à la pratique. Je commencerai par indiquer les méthodes théoriques; ensuite je dirai quelque chose des moyens que l'expérience fournit pour suppléer à leur imperfection, relativement aux applications dont je viens de parler.

II.

Écoulement des fluides par des orifices.

Le théorème de Torricelli pour l'écoulement d'un fluide par un orifice, n'a lieu que lorsque cet orifice est infiniment petit, ou physiquement très-

petit. Cependant quelques auteurs, tels que Varignon, Guglielmini, etc., donnant à ce théorème plus d'extension qu'il n'en comporte, en ont fait la base de traités sur l'écoulement des fluides par de grands orifices, et sur le mouvement des eaux courantes dans les canaux, dans les rivières ; ce qui les a conduits à des propositions hypothétiques, incertaines, et quelquefois même contredites ouvertement par l'expérience. Ce défaut, qui dépare le *Traité des fleuves*, de Guglielmini, est du moins racheté par d'excellentes remarques physiques sur le cours des eaux. Nous pouvons même ajouter que tous ces premiers essais, inutiles ou infructueux, sont excusables par la difficulté du problème. Je ne parle pas ici de la difficulté attachée à une solution rigoureuse : une telle solution est impossible ; car, puisqu'on ne sait pas même déterminer en général, par la géométrie et le calcul, les mouvemens d'un système fini de corps solides, comment trouverait-on le mouvement d'une masse fluide, composée d'une infinité d'élémens dont on ne connaît ni la grosseur, ni la figure? On ne peut donc espérer de résoudre le problème du mouvement des fluides que par approximation ; et il faut même, pour cela, 1.° que l'expérience, ou quelque propriété particulière aux fluides, commence à fournir une base sur laquelle on puisse établir la correspondance entre la théorie du mou-

vement des corps fluides et celle du mouvement des corps solides. 2.° Que les formules analytiques conduisent à des résultats applicables à la pratique : car il ne s'agit pas ici d'un problème de pure géométrie. Toute autre méthode, plus générale et plus directe en apparence, ne sera qu'une simple spéculation théorique : elle produira des expressions compliquées, dont on ne pourra faire usage dans l'explication des phénomènes de la nature, qu'en les restreignant par des suppositions, quelquefois précaires, toujours limitées, qui leur feront perdre tous les prétendus avantages de la généralité primordiale.

III.

Neuton est le premier qui ait entrepris, dans son livre *des Principes*, de résoudre le problème de l'écoulement d'un fluide par un orifice, sans s'astreindre à la supposition que cet orifice fût infiniment petit. Il considère un vase cylindrique vertical percé à son fond d'une ouverture de grandeur quelconque, par laquelle l'eau s'échappe, tandis que le vase en reçoit continuellement par en haut autant qu'il en dépense ; de telle manière que l'eau affluente peut être censée former une couche d'épaisseur uniforme, subitement étendue et posée sur l'eau du cylindre, qui par là demeure toujours plein à une même hauteur : ensuite il conçoit que

l'eau du cylindre est divisée en deux parties, l'une centrale et librement mobile, qu'il appelle la *cataracte*, l'autre adjacente et immobile, retenue à l'extérieur par les parois du vase. Il suppose que la vitesse d'une tranche horizontale quelconque de la cataracte est due à la hauteur correspondante de l'eau du cylindre, en comprenant dans cette hauteur l'épaisseur de la couche de remplacement; et comme d'un autre côté il faut, pour la continuité de la cataracte, que les vitesses de ses différentes sections horizontales soient en raison inverse de leurs surfaces, le calcul montre que la cataracte doit prendre la forme d'un solide produit par la révolution d'une hyperbole du quatrième genre autour de la ligne verticale qui passe par le centre de l'orifice. Par là, on connaît la quantité d'eau écoulée dans un temps donné.

L'auteur n'ayant pas d'abord remarqué la diminution de la dépense que doit occasionner la contraction de la veine fluide au sortir de l'orifice, avait conclu que la vitesse à cette sortie est simplement due à la moitié de la hauteur de l'eau dans le cylindre; ce qui est contraire aux expériences des jets-d'eau. Dans la seconde édition de son livre, il corrigea cette méprise; mais sa théorie générale n'en demeura pas moins vague, précaire, et même fausse quant au fond: les lois de l'hydrostatique et l'expérience ont démontré que la formation et la

Joh. Bern. op t. IV, p 484.

figure de la cataracte neutonienne sont physiquement impossibles.

IV.

La théorie des écoulemens par des orifices de grandeur quelconque, demeurait toujours dans l'imperfection, lorsque Daniel Bernoulli, après quelques heureux essais, parvint à la soumettre à un calcul général et rigoureux, en admettant quelques hypothèses suffisamment conformes à l'expérience. Tel est l'objet de son *Traité d'Hydrodynamique*, publié en 1738. L'auteur suppose, 1.° que la surface supérieure d'un fluide qui sort par un orifice quelconque, demeure toujours horizontale; 2.° qu'en partageant la masse fluide en une infinité de tranches horizontales, tous les points d'une même tranche s'abaissent suivant la verticale avec une même visesse réciproquement proportionnelle à l'étendue de la tranche; 3.° que toutes les tranches conservant ainsi leur parallélisme sont toujours contiguës, et ne changent de vitesses que par degrés insensibles, à la manière des corps pesans. Ayant posé ces fondemens du calcul, Daniel Bernoulli fait usage du principe, *qu'il y a toujours égalité entre la descente actuelle du fluide dans le vase, et l'ascension virtuelle;* ce qui est, en d'autres termes, la conservation des forces vives. Par là, il arrive, d'une manière très-

simple et très-élégante, aux équations du problème; il en applique les formules générales à plusieurs cas particuliers, utiles dans la pratique. Lorsque la figure du vase n'est pas soumise à la loi de continuité, ou lorsque, par quelqu'autre cause, il se fait des changemens brusques et finis dans la vitesse des tranches, il y a une perte de forces vives; et les équations fondées sur la conservation entière de ces forces ont besoin d'être modifiées. Daniel Bernoulli montre encore ici la sagacité d'un géomètre physicien, attentif et accoutumé à suivre la marche de la nature. Le calcul n'est jamais pour lui qu'un instrument du besoin, et non un vain étalage de formules purement théoriques. Quelques progrès que la science du mouvement des eaux ait faits depuis l'époque où l'Hydrodynamique de Daniel Bernoulli a paru, la postérité équitable comptera toujours cet ouvrage parmi les plus belles et les plus sages productions du génie mathématique.

V.

Malgré le succès éclatant qu'il eut dès sa naissance, Jean Bernoulli (père de l'auteur), et Maclaurin, jugeant que le principe secondaire de la conservation des forces vives, quoique vrai en lui-même, ne devait pas être employé immédiatement à la détermination du mouvement des fluides,

résolurent le problème par d'autres méthodes (d'ailleurs fort différentes entr'elles), qu'ils regardaient comme plus directes et plus étroitement liées aux premières lois de la mécanique. Leurs principaux résultats se trouvèrent conformes à ceux de Daniel Bernoulli. Mais, en rendant justice à leurs savantes méthodes, on y a remarqué de l'obscurité et quelques suppositions précaires. Je n'entrerai pas dans cette discussion. L'Hydraulique de Jean Bernoulli est imprimée dans le tome IV de ses œuvres, et dans les recueils de l'académie de Pétersbourg, pour les années 1737 et 1738; la théorie de Maclaurin fait partie de son traité *des Fluxions*.

VI.

D'Alembert, après avoir fait de la dynamique une science presque nouvelle, au moyen du principe dont Jacques Bernoulli avait produit le germe, appliqua avec le même succès ce principe au mouvement des fluides. Il publia sur ce sujet, en 1744, un ouvrage fort étendu, intitulé : *Traité de l'Equilibre et du Mouvement des fluides.* Dans le problème des écoulemens par des orifices quelconques, il fait d'abord les mêmes suppositions préliminaires que Daniel Bernoulli; mais voilà tout ce qu'ils ont de commun, quant aux bases du calcul. D'Alembert considère à chaque ins-

tant le mouvement d'une tranche quelconque, comme composé du mouvement qu'elle avait dans l'instant précédent, et d'un autre mouvement qu'elle a perdu; il établit facilement, et de plusieurs manières très-élégantes, les conditions de l'équilibre entre les mouvemens perdus: alors les équations résultantes font connaître les mouvemens conservés, et toutes les circonstances de l'écoulement par l'orifice. L'auteur résout ainsi avec beaucoup de simplicité, non-seulement les problèmes des géomètres qui l'ont précédé, mais encore plusieurs autres, entièrement nouveaux et très-difficiles.

Depuis cet ouvrage, d'Alembert n'a cessé jusqu'à sa mort de perfectionner et d'enrichir l'hydrodynamique. Il voyait avec peine que la détermination du mouvement d'un fluide dans un vase était astreinte à l'hypothèse, que les tranches conservent leur parallélisme, et que tous les points d'une même tranche se meuvent suivant une seule et même direction. Des tentatives réitérées lui firent enfin trouver des formules pour représenter le mouvement d'un point fluide dans un sens quelconque. Ces formules, dont la résolution ne dépend plus que de l'analyse, sont fondées sur ces deux principes, qui dérivent eux-mêmes immédiatement des premières lois de l'hydrostatique: savoir, 1.° qu'un canal rectangulaire pris où l'on voudra dans une

masse fluide en équilibre, est séparément en équilibre; 2.° qu'une portion de fluide, en passant d'un endroit à l'autre, conserve le même volume lorsque le fluide est incompressible, ou se dilate suivant une loi donnée, lorsque le fluide est élastique, en sorte que dans l'un et l'autre cas la masse demeure continue. Il publia cette nouvelle solution dans son *Essai sur la résistance des fluides*, imprimé en 1752; il l'a depuis développée et perfectionnée dans plusieurs volumes de ses *Opuscules mathématiques*.

VII.

Pendant que l'hydrodynamique faisait de si brillans progrès en France, Euler était occupé à réduire toute cette science en formules générales et uniformes, qui présentent l'un de ces beaux tableaux analytiques où l'auteur a excellé dans toutes les parties des mathématiques. Il a donné cette théorie dans un premier mémoire imprimé parmi ceux de l'académie de Berlin; il l'a ensuite étendue et perfectionnée dans quatre grands mémoires qui font partie du recueil de l'académie de Pétersbourg. L'hydrostatique, tant de fois maniée et remaniée, est présentée ici d'une manière nouvelle et avec des applications très-intéressantes. Toute la théorie du mouvement des fluides est comprise dans deux équations différentielles du second or-

Ac. de Berlin, 1755.

Acad. Pétrop. 1768, 1769, 1770, 1771.

dre; l'auteur applique les principes généraux aux écoulemens par les orifices des vases, à l'ascension de l'eau dans les pompes, à son cours dans les tuyaux de conduite de diamètres constans ou variables, etc. Il a considéré aussi le mouvement des fluides élastiques : celui de l'air le conduit à des formules très-simples sur la propagation du son, et sur la manière dont le son est produit dans les tuyaux d'orgue ou de flûte. Toutes ces recherches offrent des objets du plus grand intérêt pour les géomètres.

VIII.

M. Lagrange a donné aussi, sur le mouvement des fluides, un savant mémoire dans lequel il s'est proposé de lever ou du moins de diminuer les difficultés qui ont retardé les progrès de cette théorie, et qui ont obligé les géomètres à se contenter, pour la solution des problèmes les plus simples, de méthodes indirectes, ou fondées sur des suppositions précaires.

Ac. de Berlin, 1781.

Il y a des sciences qui, par leur nature, ne paraissent destinées qu'à nourrir la curiosité ou l'inquiétude de l'esprit humain. Mais, comme je l'ai déjà remarqué, l'hydrodynamique n'est pas de ce nombre; elle doit sortir de cet ordre purement intellectuel, et s'appliquer aux besoins de la société. Malheureusement ici les grands géomètres que je viens de citer, en s'attachant à toute la rigueur des

principes qu'admet le problème considéré théoriquement, ont été conduits à des calculs compliqués qu'on ne peut regarder que comme des vérités géométriques très-précieuses en elles-mêmes, et non comme des symboles propres à diriger le praticien dans la connaissance du mouvement actuel et physique des fluides.

IX.

On rapporte ordinairement à l'hydrodynamique une théorie particulière qui appartient aussi à la mécanique des corps solides : elle a pour objet de déterminer la percussion d'un fluide en mouvement contre un corps solide, ou la résistance qu'éprouve un corps solide en mouvement à diviser un fluide. Les géomètres ont fait les derniers efforts pour établir sur ce sujet des lois générales que l'expérience pût avouer. Résistance des fluides.

Une idée très-simple et vraie en partie, à laquelle on s'attacha d'abord, fut de regarder un fluide en mouvement, comme composé d'une infinité de filets parallèles qui donnent chacun leur coup au corps solide, sans en être empêchés par les filets voisins. De là on trouva, 1.° que dans le choc perpendiculaire d'un fluide contre un plan, ou d'un plan contre un fluide, la percussion ou la résistance est comme le produit du plan par la densité du fluide, et par le carré de la vitesse avec la-

quelle se fait la percussion; 2.° que dans le choc oblique, la percussion qui résulte perpendiculairement au plan, est comme le produit du plan par la densité du fluide, par le carré du sinus de l'angle d'incidence, et par le carré de la vitesse.

Rien n'est plus facile et plus commode que cette théorie : elle est à très-peu près conforme à l'expérience pour les chocs directs; mais dans les chocs obliques, elle s'en écarte de plus en plus, à mesure que l'obliquité augmente; de manière qu'elle devient absolument fautive, lorsque les angles d'obliquité commencent à être au-dessous de 45 degrés, comme il est prouvé par l'expérience. (*Voyez* les mémoires de l'académie des sciences de Paris, pour l'année 1778; pag. 353.)

Ce défaut considérable a excité plusieurs géomètres à chercher de nouvelles théories, ou à rectifier celle dont on vient de parler, par de certaines suppositions qu'ils regardaient comme peu éloignées de la vérité.

X.

Théorie de Neuton.

Neuton (*Princ. math.* liv. II) traite la question de la résistance des fluides sous différens points de vue, selon la différence des fluides ou des milieux dans lesquels les corps se meuvent. Il suppose d'abord un milieu rare, composé de parties égales, qui se tiennent librement à des distan-

ces égales par une cause quelconque; de sorte que chaque particule est censée pouvoir donner son coup, sans être empêchée par les autres, ce qui revient à la théorie précédente. Alors il trouve que la résistance d'un globe n'est que la moitié de celle qu'éprouverait le cylindre circonscrit mu perpendiculairement à sa base. Ensuite il cherche la résistance absolue du globe, en supposant, ou que les particules fluides sont parfaitement élastiques, ou qu'elles sont dénuées de toute élasticité : dans le premier cas, la résistance du globe est à la force par laquelle le mouvement total de ce globe peut être produit ou détruit, dans le temps qu'il emploie à parcourir les deux tiers de son diamètre par une vitesse uniformément continuée, comme la densité du milieu est à la densité du globe ; dans le second cas, la résistance est deux fois moindre. La résistance suit une proportion moyenne dans les cas intermédiaires.

Il est évident que cette théorie n'est pas applicable aux fluides continus et denses, tels que l'eau, le mercure, l'huile, etc. Aussi Neuton en donne-t-il une autre pour ces sortes de milieux, dans lesquels le globe ne frappe pas immédiatement toutes les molécules résistantes du fluide, mais communique seulement aux molécules les plus voisines une pression qui se transmet de proche en proche aux autres parties. Selon cette nouvelle théorie,

qui est fondée sur plusieurs propositions, et qui n'est pas ici susceptible d'extrait, la résistance du globe est la même que celle du cylindre circonscrit; résultat contraire à l'expérience; d'où l'on doit conclure que cette manière de considérer la résistance des fluides continus n'est pas conforme à l'état physique des choses.

XI.

Théorie de D. Bernoulli.

Dans le tome VIII des anciens mémoires de l'académie de Pétersbourg, Daniel Bernoulli propose une méthode très-ingénieuse pour déterminer le choc perpendiculaire d'une veine fluide qui sort d'un vase, contre un plan; il observe qu'en supposant au plan une certaine étendue, les filets dont la veine est composée, finissent par se fléchir suivant des directions parallèles au même plan : il regarde la courbe décrite par chaque filet, comme un canal dans lequel se meut un corps qui éprouve par conséquent en chaque point l'action de la force centrifuge, et que l'auteur suppose de plus soumis à l'action d'une force tangentielle, variable suivant une loi quelconque; il calcule toutes ces forces, et il trouve qu'il en résulte parallèlement à l'axe de la veine, ou perpendiculairement au plan, une impulsion égale au poids d'un cylindre du fluide, qui aurait pour base la section de la veine avant que les filets ne commencent à se fléchir, et pour hauteur

le double de la hauteur due à la vitesse du fluide; ce qui est assez conforme à l'expérience. Cette méthode s'applique difficilement aux chocs obliques, et à plus forte raison aux chocs contre des surfaces courbes; elle ne peut pas avoir lieu pour mesurer la résistance d'un corps plongé dans un fluide.

XII.

Théorie de d'Alembert.

D'Alembert, dans son *Essai sur la résistance des fluides*, qui parut en 1752, détermine les lois de la résistance des fluides par celles de leur équilibre. Il suppose d'abord un corps retenu en repos par quelque cause extérieure, au milieu d'un fluide qui vient le choquer. Les filets à la rencontre du corps se fléchissent suivant différentes directions; et la portion de fluide qui couvre la partie antérieure du corps, est comme stagnante dans une certaine étendue. L'auteur observe que la pression soufferte par le corps, ou la résistance qu'il oppose au mouvement des particules, est produite par les pertes de vitesses que font ces molécules; car un corps n'agit sur un autre corps qu'autant qu'il lui communique, ou tend à lui communiquer une partie de son mouvement. Il fait voir que la question se réduit à trouver d'abord la vitesse du fluide qui glisse immédiatement sur la surface du corps, et il la détermine par deux méthodes différentes. Cette vitesse étant trouvée, on a la formule rigou-

reuse de la pression ou de la résistance; mais ce calcul est très-compliqué, et de nul usage dans cet état de généralité. En le modifiant et en se relâchant un peu sur la rigueur géométrique, d'Alembert trouve que l'action perpendiculaire du fluide contre un plan, est un peu moindre que le poids d'un cylindre qui aurait pour base la largeur de la veine, et pour hauteur le double de la hauteur due à la vitesse du fluide; ce qui s'accorde à peu près avec l'expérience pour les courans d'eau resserrés dans des coursiers, mais non pas pour la résistance des fluides indéfinis en largeur et en profondeur.

Ac. de Péters. 1763. Euler, admettant comme d'Alembert, que la résistance d'un fluide est produite par la pression, détermine d'ailleurs la vitesse par les moyens ordinaires, et s'épargne beaucoup de longs calculs; mais cette nouvelle méthode *mixte* est encore insuffisante.

XIII.

Toutes les théories précédentes ne sont, pour ainsi dire, que des spéculations de géométrie; et on ne peut en faire des applications avec sûreté, qu'en les modifiant, ou en y suppléant par la voie de l'expérience.

Il n'existait point d'expériences un peu en grand sur le mouvement des fluides, avant celles que je commençai à faire en 1766, et que j'ai continuées

dans la suite. Ce travail, qui embrasse à peu près toutes les parties de l'hydraulique pratique, est exposé au long dans les différentes éditions de mon *Traité d'Hydrodynamique*, dont la première parut en 1771. Sans entrer ici dans aucun détail, je dirai seulement que les expériences sur la résistance des fluides dans des canaux étroits et peu profonds, furent faites en 1775, à l'occasion du fameux canal souterrain de Picardie. On s'accorde, ce me semble, à reconnaître qu'elles ont pleinement éclairci une matière très-importante, sur laquelle on n'avait que des notions vagues ou même fausses.

M. Dubuat, ci-devant correspondant de l'académie des sciences, et aujourd'hui correspondant de l'institut, fit paraître, en 1786, un excellent ouvrage intitulé : *Principes Hydrauliques*, dans lequel on trouve un grand nombre d'expériences et de vues théoriques sur le mouvement des eaux dans les rivières, les canaux, les tuyaux de conduite, la résistance des fluides, etc.

CHAPITRE V.

Suite des deux chapitres précédens. Applications importantes de la mécanique et de l'hydrodynamique.

I.

LA mécanique calcule l'effet des machines : l'hydrodynamique fournit à plusieurs machines le principe moteur, comme, par exemple, dans les pompes, les moulins à eau ou à bras, les roues hydrauliques, la construction des vaisseaux, etc. Je ne puis pas entrer ici dans tous ces détails : je me bornerai à ceux de l'action des fluides sur un vaisseau flottant à la mer, grand objet d'utilité universelle, et où l'industrie humaine a continuellement besoin d'être conduite par les règles de la science.

II.

Dès l'année 1689, le chevalier de Renau, lieutenant-général des armées du roi de France, entreprit de soumettre le mouvement du navire au calcul, dans un ouvrage intitulé : *Théorie de la manœuvre du vaisseau.* Une de ses principales propositions était que si un navire est poussé en

même temps par les actions de deux voiles perpendiculaires entr'elles, et qu'on représente ces forces par les côtés contigus d'un parallélogramme rectangle construit sur leurs directions, le navire éprouvera, de la part de l'eau, une résistance représentée par la diagonale. Huguens observa que la proposition serait vraie, si les résistances de l'eau étaient comme les simples vitesses; mais qu'elle est fausse, dans l'hypothèse conforme à la nature, que les résistances sont comme les carrés des vitesses. En effet, suivant cette hypothèse, les résistances que l'eau oppose aux actions des deux voiles, et qui leur font équilibre, étant comme les carrés des vitesses, il faut d'abord construire un parallélogramme pour représenter les deux vitesses que les deux voiles imprimeraient séparément au navire : ensuite il faut construire un second parallélogramme, tel que ses côtés, ayant d'ailleurs mêmes directions que ceux du premier, soient proportionnels à leurs carrés : alors la diagonale de ce second parallélogramme exprimera la résistance composée; et la vitesse du navire, dirigée suivant cette même diagonale, sera proportionnelle à sa racine carrée. Renau ne se rendit point aux démonstrations de Huguens : il persista dans son opinion erronée, jusqu'à ce qu'enfin Jean Bernoulli, dans son *Essai sur la manœuvre des vaisseaux*, publié en 1714, mit la vérité dans tout son jour, et démêla

les paralogismes dans lesquels l'auteur français s'enveloppait.

Ce même auteur était tombé dans une autre erreur capitale : il avait avancé que l'angle de la dérive d'un vaisseau pouvait se déterminer, dans tous les cas, *quelles que fussent la figure et la grandeur du vaisseau, par le seul rapport qu'il y a de la résistance qu'il trouve à fendre l'eau avec son côté, à celle qu'il trouve à le faire avec sa pointe* : règle fort simple, et qui serait d'un usage commode, si elle était vraie. Jean Bernoulli démontra que la forme et les dimensions du navire entrent nécessairement, comme élémens, dans la détermination de la dérive, et il fit voir, par divers exemples, que la méthode du chevalier de Renau mènerait souvent à des erreurs très-considérables et très-dangereuses.

Quoique Jean Bernoulli n'ait pas résolu avec assez de généralité la plupart des problèmes que son sujet comportait, il rendit néanmoins un très-grand service à l'art nautique, en y appliquant exactement les principes alors reçus sur la résistance des fluides.

III.

Stabilité du vaisseau.

On s'était jeté d'abord dans les plus difficiles problèmes de la manœuvre des vaisseaux, sans trop avoir examiné les conditions essentielles à l'équi-

libre de ces sortes de corps : conditions d'où dépendent cependant la sûreté de la navigation, et en même temps tous les avantages qui peuvent la rendre prompte et facile. Les géomètres revinrent donc sur leurs pas, et reprirent en quelque sorte la science navale par les fondemens. On savait depuis long-temps qu'afin qu'un corps solide, flottant sur un fluide, demeure en équilibre, il faut 1.° que son poids absolu, et celui du fluide qu'il déplace, soient égaux entr'eux; 2.° que le centre de gravité de ce corps, et celui de sa partie submergée, considérée comme homogène, soient placés sur une même ligne verticale. Mais cela ne suffit pas pour former un équilibre solide et permanent. Daniel Bernoulli fit voir de plus qu'eu égard aux diverses situations respectives que les deux centres de gravité peuvent avoir sur la ligne verticale, il existe divers états d'équilibre, plus ou moins *fermes*. Lorsque le centre de gravité du système de toutes les matières qui composent la charge d'un vaisseau, est placé au-dessous du centre de gravité de la carène ou de la partie submergée, l'équilibre est toujours ferme, ou tend à se rétablir s'il a été dérangé par quelque cause extérieure, telle que l'agitation des lames, l'inégalité dans les impulsions du vent, etc. : le vaisseau revient à sa première situation avec d'autant plus d'énergie, que son centre de gravité est placé plus bas. Mais lorsque les deux

Acad. Pétrop. 1735.

centres de gravité se confondent, ou lorsque celui du navire est plus élevé que celui de la carène; l'équilibre est *versatile,* et de plus en plus versatile, à mesure que cette élévation augmente. Daniel Bernoulli donne des formules pour évaluer le degré de stabilité du vaisseau dans tous les cas.

Il paraît qu'Euler avait trouvé de son côté, et dans le même temps, des résultats semblables; il les développe et les démontre dans son ouvrage: *Scientia Navalis,* 1749.

Bouguer, né en 1698, mort en 1758.

Bouguer explique au long la même théorie, d'une manière nouvelle et très-simple, dans son *Traité du Navire,* publié en 1746. Il fait connaître, sous le nom de *métacentre,* la limite au-dessous de laquelle doit être placé le centre de gravité de toute la charge du vaisseau; il examine la meilleure position des mâts, l'étendue qu'il faut donner aux voiles, et les divers mouvemens de roulis et de tangage qui peuvent arriver, à raison des changemens du *point velique,* c'est-à-dire, du point auquel doivent concourir la résultante des efforts de l'eau contre le vaisseau, la résultante des efforts du vent contre les voiles, et la verticale menée par le centre de gravité de la charge totale du vaisseau. Les connaissances pratiques qu'il joignait à une profonde théorie, l'ont mis en état de répandre sur ce sujet des lumières fort utiles aux marins. Il a traité encore plus spécialement *de la*

manœuvre des vaisseaux, ou des mouvemens du navire, dans un autre ouvrage qu'il fit paraître en 1757: Mais il y a, par malheur, dans ces recherches, un vice radical qui en diminue beaucoup l'utilité dans la pratique : elles sont fondées pour la plupart sur la théorie ordinaire de la résistance des fluides, dont on ne peut faire usage qu'avec les restrictions que j'ai indiquées.

IV.

L'académie des sciences de Paris, toujours occupée de l'utilité publique, a singulièrement contribué aux progrès de la navigation dans le siècle passé, par les sujets de prix qu'elle proposait aux savans de toutes les nations, sur des questions qui se rapportent à cet objet important.

Le sujet du prix de 1727, adjugé à Bouguer, fut de *déterminer la meilleure manière de mâter un vaisseau*. Bouguer discute successivement les conditions du problème pour la route directe et pour la route oblique. La première a rarement lieu ; mais elle doit être néanmoins examinée avec attention, comme donnant la limite de la plus grande hauteur à laquelle on puisse porter la mâture. Le principe fondamental du problème est de régler le nombre, la hauteur et la distribution des mâts, de telle manière que le centre d'effort du vent contre toutes les voiles se trouve toujours,

du moins à peu près, au point où la résultante de toutes les impulsions de l'eau contre le navire qui la divise, va rencontrer la verticale élevée par le centre de gravité de la charge totale. Bouguer avait à combattre plusieurs mauvaises pratiques accréditées. On n'avait pas encore réfléchi sur la nécessité de bien fixer ce point de concours, et sur le danger, presqu'égal, de le plaçer trop haut ou trop bas : on changeait la hauteur et la largeur des voiles, sans se mettre en peine de l'endroit où viendrait ensuite se réunir l'action du vent. D'un autre côté, on ne faisait ordinairement dépendre la résistance de l'eau, que de la seule largeur et de la seule longueur du vaisseau, tandis qu'il peut arriver que deux vaisseaux, qui se ressemblent sur ces deux points, aient d'ailleurs des figures fort différentes, et que par conséquent les résistances de l'eau soient aussi fort différentes, tant en quantités qu'en directions. Bouguer porta le flambeau de la géométrie sur toutes ces questions et sur plusieurs autres qui en dépendent. Sa pièce a été le germe de toutes ses recherches ultérieures, répandues dans ses traités *du Navire* et de *la Manœuvre des Vaisseaux,* dont j'ai déjà parlé.

V.

Les prix des années 1729, 1731, 1733, 1737, 1741, eurent pour objets respectifs, la meilleure

manière d'observer en mer la hauteur des astres; la méthode d'observer en mer la déclinaison de la boussole; la mesure du sillage du vaisseau; la construction des ancres; l'invention de nouveaux cabestans, ou la correction des anciens. Toutes ces questions produisirent d'excellens mémoires, que je ne puis analyser ici, et auxquels je renvoie le lecteur, en avertissant qu'ils ont pour auteurs, Bouguer, Poleni, Daniel Bernoulli, Euler et Jean Bernoulli fils.

VI.

Le concours de 1743, sur la meilleure manière de construire des boussoles d'inclinaison, est remarquable en particulier, par la pièce de Daniel Bernoulli, qui remporta le prix, et celle d'Euler, qui obtint l'*accessit*.

Jusque-là, deux boussoles d'inclinaison étaient sujettes à donner quelquefois des résultats très-différens, dans un même lieu, et dans les mêmes circonstances, malgré tous les soins qu'on prenait de les bien construire, et d'une manière semblable, comme de les frotter contre un même acier, de leur donner la même longueur, la même épaisseur. Daniel Bernoulli propose des moyens très-ingénieux et très-sûrs, fondés sur les lois de la mécanique, pour faire disparaître ces différences. Ils aboutissent à faire en sorte, 1.° que l'aiguille soit

parfaitement mobile, de sorte qu'elle tourne librement sur son axe, sans souffrir le moindre frottement. 2.° Que l'action de la *pesanteur magnétique* ait pleinement son effet, sans être altérée par aucune autre force, surtout par la *pesanteur naturelle,* qui est commune à tous les corps. Avec ces précautions principales, et leurs accessoires, on ne pourra manquer de parvenir à rendre toutes les boussoles d'inclinaison exactement comparables, en parité de circonstances.

Euler s'est plus appliqué à déterminer en géomètre les causes qui produisent des différences dans les boussoles d'inclinaison, qu'à chercher en physicien les moyens d'y obvier.

VII.

Ces deux grands géomètres partagèrent le prix double de 1747, sur la meilleure manière de trouver l'heure en mer, par l'observation, soit dans le jour, soit dans les crépuscules, et surtout dans la nuit, quand on ne voit pas l'horizon.

On sait qu'on peut toujours trouver l'heure par l'observation d'un astre au-dessus de l'horizon, ou par sa distance au zénith; mais ces sortes d'observations sont très-difficiles à faire avec exactitude en pleine mer, à cause de l'agitation continuelle du vaisseau, surtout quand on ne voit pas l'horizon. Daniel Bernoulli propose en général des moyens

tirés d'une mécanique très-délicate, pour détermi-ner la ligne verticale : il suspend plusieurs pendules de longueurs différentes, à un même axe attaché fortement au centre de gravité du vaisseau, ou le plus près qu'il est possible de ce point; il attend que les mouvemens de roulis et de tangage soient devenus réguliers, ce qui arrive presque toujours, au moins pour quelques instans, même quand les agitations sont fort violentes; et par la comparaison des formules qui expriment les angles que les fils des pendules doivent faire avec la verticale, il conclut la direction absolue de cette ligne; il construit sur ce principe un instrument qui fait connaître la position d'un astre, et par conséquent l'heure. La question est ensuite de conserver l'heure, au moins pour quelque temps. C'est à quoi servent d'excellentes montres. Daniel Bernoulli fait, sur la construction de ces machines, des remarques mathématiques et physiques, dont les artistes ont tiré dans la suite les plus heureux secours. Il n'oublie aucun moyen de porter la solution du problème de l'académie au degré d'exactitude qu'on pouvait alors espérer.

Euler ne s'est pas attaché à examiner la question sous le rapport immédiat et principal qu'elle a avec la détermination des longitudes en mer : il s'est contenté de discuter, par de savans calculs, les avantages et les inconvéniens des instrumens con-

nus pour prendre hauteur en mer, et de proposer quelques moyens pour les perfectionner.

VIII.

Un vaisseau cinglant à la mer est souvent détourné de sa route par des courans, malgré tous les obstacles qu'on leur oppose. Daniel Bernoulli remporta le prix double de l'académie pour l'année 1751, sur la cause et la nature de ces courans, la meilleure manière de les observer, et d'en empêcher les mauvais effets. Ce sujet demandait, pour être traité avec succès, comme il l'a été, de profondes connaissances mathématiques et physiques, dont Daniel Bernoulli était éminemment pourvu.

Le même auteur fut couronné en 1753, sur la meilleure manière de suppléer en mer à l'action du vent. Il propose à cet effet des rames d'une forme particulière, dont il détermine l'arrangement et les dimensions avec sagacité; mais ce moyen n'est guère praticable pour les grands vaisseaux.

IX.

En 1755, M. Chauchot, alors sous-constructeur des vaisseaux du roi, à Brest, remporta le prix de l'académie sur la manière de diminuer, le plus qu'il est possible, les mouvemens de roulis et de tangage du navire, sans lui faire perdre, au

moins sensiblement, aucune des bonnes qualités qu'il doit avoir. Il propose de faire à la construction du vaisseau et à la mâture quelques changemens faciles, dont il tâche d'apprécier les effets par la géométrie.

La question n'ayant pas été jugée suffisamment résolue, fut proposée de nouveau pour le sujet du prix de 1757, qui fut adjugé à Daniel Bernoulli.

Un examen plus exact et plus approfondi des lois de la mécanique et de l'hydrodynamique, d'où dépendait la solution complète du problème, mit ce dernier auteur en état de traiter le sujet avec plus d'exactitude et plus de succès. Le principal avantage de ces nouvelles recherches fut d'assurer parfaitement la stabilité du vaisseau, sans laquelle il est exposé à périr, ou par submersion, ou par la désunion que la tourmente tend à produire dans ses parties.

Comme il est impossible d'empêcher entièrement les mouvemens de roulis et de tangage, quelques précautions qu'on prenne pour établir la stabilité, il faut du moins tâcher de donner toute la solidité possible à l'assemblage des différentes pièces du vaisseau. Dans cette vue, l'académie proposa pour sujet du prix de 1759, l'examen des efforts que la carcasse du vaisseau éprouve dans les mouvemens de roulis et de tangage, et les moyens d'en empêcher les mauvais effets. Le prix fut par-

tagé entre Euler, et Grognard constructeur des vaisseaux du roi à Toulon. Euler perfectionna la théorie; Grognard proposa plusieurs changemens avantageux à la construction.

X.

Après avoir ainsi pourvu à la sûreté de la navigation, on voulut savoir si l'*arrimage*, ou la distribution de la charge d'un vaisseau, n'aurait pas quelqu'influence sur ses mouvemens à la mer. L'académie de Paris, proposa donc pour sujet du prix de 1761, de déterminer la meilleure manière de lester et d'arrimer un vaisseau; et les changemens qu'on peut faire en mer à l'arrimage, soit pour faire mieux porter la voile au navire, soit pour lui procurer plus de vitesse, soit pour le rendre plus ou moins sensible au gouvernail. Le prix fut partagé entre M. Jean-Albert Euler et moi. La pièce de M. Euler est remarquable par de profondes recherches de géométrie, surtout relativement au mouvement de rotation d'un corps autour de trois axes principaux; les juges du prix pensèrent que m'étant un peu plus resserré dans les bornes de la question, je l'avais traitée avec un peu plus de soin : ce qui (tout compensé) leur fit regarder nos deux pièces comme égales.

Les pratiques de l'arrimage des vaisseaux furent le sujet du prix double pour l'année 1765 : prix

qui fut partagé entre M. *Bourdé de Villhuet*, M. *Gauthier*, M. *Grognard* et moi. Mes trois rivaux, marins de profession, ont traité complètement la partie pratique de la question. Je n'ai pas négligé ce même objet, ayant eu soin de prendre pour cela divers renseignemens. Sans sortir du sujet, j'ai eu occasion de résoudre quelques nouveaux problèmes de théorie, entr'autres celui de l'action du gouvernail, en ayant égard au mouvement de charnière que cette pièce reçoit elle-même du choc des eaux, autour de l'axe par lequel elle tient au corps du navire.

XI.

Nous voici arrivés aux temps où l'horlogerie, après plusieurs essais, est enfin parvenue à construire des montres qui conservent leur mouvement uniforme à la mer, du moins sensiblement, pendant de très-longues traversées; d'où résulte la manière la plus simple et la plus commode de déterminer à chaque instant la longitude du vaisseau, avec une précision suffisante. **Montres marines.**

En partant d'un port dont la position est supposée connue, une excellente montre marine, réglée sur le temps de ce port, continuera de le marquer à la mer. Ainsi, lorsqu'on voudra déterminer la longitude du vaisseau en un endroit quelconque de sa course, on prendra la différence entre l'heu-

re marquée par la montre, et l'heure observée dans le vaisseau par la hauteur des astres; puis, en convertissant cette différence en degrés, à raison de 24 heures pour 360 degrés, ou de 1 heure pour 15 degrés, on aura, en degrés, la longitude du vaisseau par rapport au lieu de départ, ou à tout autre endroit bien connu de position.

Le parlement d'Angleterre avait promis, par un acte légal, passé en 1714, sous le règne de la reine Anne, une récompense de dix mille livres sterlings, à celui qui, au jugement du bureau des longitudes, présidé alors par Neuton, résoudrait le problème des longitudes, à un degré de grand cércle près; de quinze mille livres sterlings si l'erreur n'excédait pas deux tiers de degré; enfin, de vingt mille livres sterlings, si la précision allait jusqu'à un demi-degré. Il s'écoula un grand nombre d'années avant qu'on eût rien trouvé de satisfais nt.

Henri Sully, horloger anglais, attiré en France par le fameux contrôleur-général *Law*, sous la régence du duc d'Orléans, est le premier qui ait construit une montre marine, suivant les vrais principes de l'art; mais cette machine, éprouvée en 1726, n'eut pas le succès qu'il s'en promettait. Il mourut peu de temps après, sans l'avoir perfectionnée. On lui doit plusieurs autres belles inventions dans l'horlogerie.

Un autre célèbre horloger anglais, Jean Harri-

son, s'exerça pendant très-long-temps sur la construction des montres marines. Il eut un premier succès en 1749; la société royale de Londres lui adjugea le prix attaché à la plus utile découverte qui se fût faite dans l'année. En 1761 et 1762, une nouvelle montre marine de sa façon, qu'il présenta à l'amirauté, fut portée de Portsmouth à la Jamaïque, et rapportée de là à Portsmouth; et dans l'espace de cent quarante-sept jours que dura le voyage, elle se dérangea seulement d'une minute cinquante-quatre secondes; dans un second voyage fait en 1764, de Londres à la Barbade, on trouva que l'erreur de la montre avait été de deux minutes vingt secondes, en cent cinquante-six jours. D'après ces deux épreuves, et un examen scrupuleux qui fut fait de la machine, pendant dix mois consécutifs, à l'observatoire de Greenwich, Harrison se crut en droit de demander le *maximum* de la récompense, c'est-à-dire les vingt mille livres sterlings, promises par l'acte de 1714; mais on ne lui en accorda d'abord que la moitié, sous prétexte que sa montre était sensible aux impressions du chaud et du froid; que la mécanique en était fort compliquée, et excédait la portée d'intelligence des ouvriers ordinaires; et qu'enfin il pouvait se faire que l'erreur ne parût petite que par la compensation de plusieurs erreurs plus grandes, en sens contraires. Il perfectionna sa machine; on en fit de nou-

velles épreuves qui réussirent parfaitement, et enfin il obtint l'autre moitié de la récompense; il mourut en 1770, âgé de quatre-vingt-deux ans.

Pendant que les Anglais poursuivaient avec tant d'ardeur cette grande découverte, les horlogers français travaillaient de leur côté à les égaler, et peut-être même à les surpasser. Pierre Leroi, fils aîné du célèbre Julien Leroi, et Ferdinand Berthoud, se sont le plus distingués dans cette partie. Tous deux construisirent, à peu près dans le même temps, des montres marines, qui ont eu encore plus de succès que celles de Harrison, et qui d'ailleurs paraissent l'emporter par la simplicité du mécanisme.

Notre académie avait proposé pour sujet du prix de 1767, et ensuite de 1769, la meilleure manière de mesurer le temps à la mer. Le prix devenu double fut adjugé à une montre marine de Pierre Leroi, qu'on avait jugée d'abord très-exacte dans les principes, et qui fut soumise d'ailleurs aux épreuves de la mer, dans un voyage fait en 1767, du Hâvre à Amsterdam, et dans un autre voyage fait en 1768, par M. Cassini, aujourd'hui membre de l'institut de France, en partant du Hâvre, allant à l'île Saint-Pierre, proche Terre-Neuve, de là aux côtes d'Afrique, et venant débarquer à Brest, après avoir touché les côtes d'Espagne et de Portugal. M. Berthoud avait fait dans le même

temps deux montres marines pour le service du roi; mais elles ne furent pas mises au concours.

Sur la fin de l'année 1768, le roi de France fit armer une frégate pour vérifier toutes les méthodes des longitudes, et spécialement pour constater la marche de deux horloges marines de M. Berthoud. Le bâtiment était commandé par M. de Fleurieu, aujourd'hui membre de l'institut de France, qui s'associa M. Pingré, membre de l'académie, pour faire les observations. Les deux montres de M. Berthoud soutinrent l'épreuve avec honneur; elles marquèrent le temps avec plus de précision encore que l'auteur ne l'avait promis.

Un autre voyage fait par ordre du roi en 1771 et 1772, en diverses parties de l'Europe, de l'Afrique et de l'Amérique, par MM. de Verdun, Borda et Pingré, eut pour objet d'examiner les divers instrumens astronomiques et mécaniques, destinés à déterminer les longitudes, et de faire en général toutes les observations qui pouvaient être utiles à la navigation. Trois montres marines, dont deux étaient de Pierre Leroi, et l'autre de Ferdinand Berthoud, furent embarquées et vérifiées avec le plus grand soin.

La précision qu'on avait exigée jusque-là des montres marines, était de donner l'heure, pendant dix mois, avec moins de 4 minutes d'erreur, pour un degré de longitude. On trouva les erreurs de ces

trois montres fort au-dessous de cette limite. Les deux montres de Pierre Leroi remportèrent le prix double de l'académie pour l'année 1773. Ferdinand Berthoud avait déclaré formellement qu'il ne prétendait point concourir. Cet excellent artiste a formé plusieurs élèves qui marchent dignement sur ses traces, entr'autres son neveu Louis Berthoud, qui a construit lui-même des montres marines et des chronomètres d'une perfection auparavant inconnue.

Je n'ajouterai plus qu'un mot sur les montres marines : quoique ces machines soient de la plus grande utilité dans la navigation, on ne doit pas oublier que comme tous les ouvrages de mécanique, elles sont sujettes à se déranger, au moins à la longue, par divers accidens, ou par des imperfections inévitables dans la construction. Il est donc à propos de les vérifier de temps en temps, dans les atterrages, au moyen des observations astronomiques. La prudence veut même qu'on mette dans chaque vaisseau, au moins deux montres marines reconnues pour excellentes, afin de pouvoir conclure de leur marche comparative la mesure du temps avec toute l'exactitude possible.

XII.

La mécanique pratique a été aussi perfectionnée en d'autres parties, par les soins de notre académie.

Le prix double, pour l'année 1777, sur la meilleure construction des aiguilles aimantées, produisit deux belles pièces : l'une de M. Wansvinden, l'autre de M. Coulomb, entre lesquelles il fut partagé. M. Wansvinden est entré dans de longs détails de recherches théoriques et expérimentales sur la construction des aiguilles aimantées : il finit par proposer une boussole qui paraît avoir des avantages sur les boussoles ordinaires. M. Coulomb marche plus promptement vers le but. Après avoir examiné les inconvéniens qui s'opposent à la perfection des boussoles ordinaires, il propose, d'après sa théorie et ses expériences, deux boussoles, l'une suspendue par un fil, et propre à faire des observations de physique, l'autre suspendue sur une chape, et qui peut être d'un usage sûr à la mer.

COULOMB, né en 1736, mort en 1806.

Le même M. Coulomb remporta le prix double de l'académie, pour l'année 1781, sur la théorie et la pratique des machines, en ayant égard au frottement, et à la roideur des cordages, ou à la difficulté qu'ils font à se plier. Son mémoire est principalement recommandable par des expériences en grand sur toutes les parties du sujet.

CHAPITRE VI.

Progrès de l'Astronomie.

INTRODUCTION.

On serait étonné des progrès que l'astronomie a faits depuis la fin du dix-septième siècle jusqu'à nos jours, si l'on ne songeait aux secours qu'elle a tirés de la physique, de la mécanique et de la géométrie, soit pour perfectionner les anciens instrumens, ou pour en inventer de nouveaux, soit pour mettre plus d'exactitude dans les observations, soit enfin pour apprécier et faire disparaître toutes les causes d'altérations réelles ou apparentes dont les observations peuvent être affectées. Tout a concouru à donner, pour ainsi dire, une nouvelle vie à cette science, et à lier plus étroitement toutes ses parties, par la connaissance plus intime de leurs rapports mutuels : on a découvert plusieurs nouveaux phénomènes célestes ; on a perfectionné la théorie des planètes principales et des satellites ; on a dressé des *tables* de leurs mouvemens, très-supérieures à celles qui existaient

déjà; on a observé avec soin un grand nombre de comètes, etc. De leur côté, les géomètres se sont efforcés d'assigner avec précision les causes physiques des mouvemens célestes; et leurs calculs ont été infiniment utiles à l'astronomie pratique elle-même, par l'avantage qu'ils ont de soumettre à la loi de continuité, ou d'attacher à une même courbe, les faits isolés que présentent les observations.

On sent qu'il n'est pas possible d'exposer ici en détail tant de travaux. Cela demanderait une histoire particulière. En me renfermant toujours dans mon plan, je dois me borner à faire connaître en général l'état de l'astronomie sous cette quatrième période, avec toute la précision et toute la méthode qui seront en mon pouvoir. Dans cette vue, et pour la plus grande clarté, je diviserai d'abord ce chapitre en deux parties, dont chacune comprendra encore plusieurs subdivisions.

La première partie aura pour objet l'astronomie pratique, c'est-à-dire la connaissance des mouvemens célestes, tels qu'on les trouve par des observations immédiates, ou tels qu'on les déduit de plusieurs observations combinées ensemble. La seconde contiendra l'astronomie physique, ou la recherche des lois générales qui règlent ces mouvemens, et qui servent à les expliquer.

PREMIÈRE PARTIE.

Astronomie pratique.

SECTION PREMIÈRE.

Principes. Mouvemens de la terre et de la lune. Éclipses de soleil et de lune.

I.

Objet général de l'astronomie.

TOUTE l'astronomie a pour objet final de faire connaître la position d'un astre dans le ciel, pour un instant donné. Or, cette position se trouve par la *latitude* et par la *longitude*, comme celle des objets terrestres : mais ici la latitude est l'arc de grand cercle, mené de l'astre, perpendiculairement à l'écliptique; et la longitude est l'arc de l'écliptique, compté depuis le cercle de latitude de l'astre, jusqu'à un premier cercle de latitude, pris arbitrairement, comme par exemple le colure du printemps.

II.

Mouvement réel de la terre.

La connaissance exacte du mouvement réel de la terre autour du soleil, ou du mouvement apparent du soleil autour de la terre, est indispensablement nécessaire pour parvenir à celle de tous les

corps célestes. On s'est donc appliqué à établir cet élément fondamental avec précision. Hipparque avait remarqué la précession des équinoxes, ou la différence qu'il faut mettre entre l'année *tropique* et l'année *sidérale,* c'est-à-dire entre le retour du soleil à un même colure, et le retour à une même étoile fixe : différence qui provient d'un petit mouvement apparent des étoiles en longitude, suivant l'ordre des signes. Par le rapprochement et la combinaison des observations anciennes et modernes, on a trouvé que l'année tropique ou ordinaire est de 365 jours 5 heures 48 minutes 48 à 49 secondes, et que l'année sidérale est de 365 jours 6 heures 9 minutes 10 secondes. Ainsi, l'année tropique est plus courte que l'année sidérale, d'environ 20 minutes 22 secondes; ce qui répond à 50 secondes de degré à peu près, quantité moyenne de la précession annuelle des équinoxes. Les observations modernes ont de plus fait connaître que l'apogée du soleil a, suivant l'ordre des signes, un petit mouvement qui est d'environ 16 secondes de degré en un an; d'où résulte une troisième espèce d'année, appelée *année anomalistique,* laquelle est de 365 jours 6 heures 15 minutes 46 secondes.

III.

Les astronomes de tous les temps se sont accor-

Mouvement de la lune.

dés à faire tourner la lune autour de la terre; mais ce mouvement se complique avec d'autres, et on a eu bien de la peine à débrouiller ce cahos. D'abord Tycho avait remarqué que l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique, éprouve des variations : on s'est assuré que cette inclinaison change depuis 5 degrés jusqu'à 5 degrés 18 minutes. On avait reconnu aussi que les nœuds de l'orbite de la lune, et l'apogée de cette planète, sont mobiles : on a trouvé que les nœuds font, contre l'ordre des signes, une révolution entière à l'égard du premier point du bélier, en 18 ans 224 jours, et que l'apogée fait à l'égard du même point, mais suivant l'ordre des signes, une révolution en 8 ans 309 jours 8 heures. De là, en faisant commencer successivement la révolution de la lune autour de la terre, au premier point du bélier, à une étoile fixe, au soleil, à l'apogée de la lune, aux nœuds de son orbite, on distingue cinq sortes de mois lunaires, qui ont différentes durées : savoir, 1.° le *mois périodique* (27 jours 7 heures 43 minutes 5 secondes); 2.° le *mois sidéral* (27 jours 7 heures 43 minutes 12 secondes); 3.° le *mois synodique* (29 jours 12 heures 44 minutes 3 secondes); 4.° le *mois anomalistique* (27 jours 13 heures 18 minutes 34 secondes); 5.° enfin le *mois nodial* (27 jours 5 heures 5 minutes 35 secondes).

Cette planète a, de même que la terre, un mouvement de rotation qui s'accomplit dans le même espace de temps que la lune met à faire sa révolution périodique autour de la terre; et de plus, l'axe lunaire est presque perpendiculaire au plan de l'écliptique : double effet qui se conclut de ce que la lune présente toujours la même face à la terre, sauf quelques petits mouvemens de libration. Je reviendrai à ces mouvemens dans la seconde partie.

IV.

La terre et la lune sont deux corps opaques, éclairés chacun à moitié environ par le soleil : du côté opposé, ces corps jettent des cônes d'ombre; et il y a éclipse de lune quand la lune passe dans le cône d'ombre de la terre; éclipse de terre (ce qu'on appelle improprement *éclipse de soleil*), quand la terre passe dans le cône d'ombre de la lune. Prenons d'abord une idée générale des hauteurs de ces deux cônes. Eclipses de soleil et de lune.

Suivant les observations astronomiques, le soleil est environ un million de fois plus gros ou plus *volumineux* que la terre; et la terre cinquante fois plus grosse que la lune. La distance de la terre au soleil est de vingt mille six cent vingt-sept demi-diamètres du globe terrestre; et la distance moyenne de la terre à la lune est de soixante de ces demi-diamètres. D'après ces *données*, on trouve que la

hauteur du cône d'ombre de la terre est de deux cent neuf des mêmes demi-diamètres, et la hauteur du cône d'ombre de la lune, de cinquante-six.

Cela posé, si l'orbite de la terre autour du soleil, et l'orbite de la lune autour de la terre, étaient dans un même plan, il y aurait éclipse de lune à chaque opposition de cette planète par rapport au soleil et à la terre, puisqu'alors la lune traverserait le cône d'ombre terrestre : pareillement, à chaque conjonction de la lune avec le soleil et la terre, il y aurait éclipse de soleil pour tous les habitans de la terre qui pourraient se trouver dans le cône d'ombre lunaire. Mais les orbites de la terre et de la lune ne sont pas dans un même plan ; l'orbite lunaire est inclinée d'environ 5 degrés à l'écliptique ; ce qui produit plusieurs variétés dans l'étendue et la durée des éclipses, tant lunaires que solaires.

Eclipses de lune.

Lorsque la lune est dans ses *nœuds*, et par conséquant dans le plan de l'écliptique ; si de plus le centre de cette planète rencontre alors l'axe du cône d'ombre terrestre, il y aura éclipse totale et centrale de lune. L'éclipse peut encore être totale, mais non centrale, lorsque le centre de la lune laisse à une certaine distance, susceptible de quelques variétés, l'axe du cône d'ombre terrestre ; après quoi viennent les éclipses partielles. La durée de l'éclipse centrale est la plus longue de tou-

tes : elle peut monter à 4 heures, depuis l'entrée de la lune dans l'ombre, jusqu'à sa sortie.

Les éclipses de soleil s'expliquent de même, avec cette différence néanmoins que la lune étant beaucoup moindre que la terre, le cône d'ombre lunaire ne peut couvrir qu'une petite partie de la surface de la terre, et il n'y a que les seuls habitans de cette partie, qui soient privés de la lumière du soleil. Les éclipses totales de soleil sont extrêmement rares, et le temps le plus long que le soleil puisse demeurer entièrement caché, n'est guère que de 4 minutes. S'il arrive même qu'au temps d'une conjonction parfaite du soleil, de la lune et de la terre, la terre se trouve à sa plus grande distance du soleil, et la lune à sa plus petite distance de la terre, la pointe du cône d'ombre lunaire n'atteindra pas jusqu'à la terre : alors l'éclipse sera annulaire, en sorte que le soleil formera une couronne lumineuse autour de la lune. La plupart des éclipses de soleil ne sont que partielles. Eclipses de soleil.

La presqu'égalité des diamètres apparens du soleil et de la lune, donne lieu à quelques phénomènes curieux et dignes de remarque. Supposons que les centres du soleil, de la lune et de la terre, soient exactement en ligne droite : alors, si les diamètres apparens du soleil et de la lune sont censés rigoureusement égaux, l'éclipse de soleil sera totale ; si le diamètre du soleil est un peu plus

grand que celui de la lune, l'éclipse sera annulaire; enfin, si le diamètre apparent de la lune est un peu plus grand que celui du soleil, l'éclipse sera, pour ainsi dire, plus que totale, et le soleil demeurera entièrement caché pendant quelque temps. Tous ces phénomènes ont été observés, au moins par intervalles, en divers pays. Par exemple, il y eut une éclipse totale de soleil à Arles, en 1706; à Londres, en 1715; à Paris, en 1724. L'éclipse du 1.er avril 1764, fut vue annulaire à Mézières, ville de guerre, dans le département des Ardennes.

Quoique dans les éclipses totales de soleil, l'obscurité devienne très-grande, elle ne forme pas cependant une véritable nuit; il reste toujours une certaine clarté, produite par les rayons que l'atmosphère réfléchit; mais le passage subit du grand jour à un état si opposé, pendant que le soleil est encore sur l'horizon, affecte singulièrement les animaux. A Paris, on observa, en 1724, qu'à mesure que le soleil se cachait, les oiseaux effrayés cessaient de chanter, et cherchaient d'autres retraites.

Hist. de l'ac 1724, pag. 87.

Penombres.

Une éclipse de lune ou de soleil ne commence et ne finit réellement qu'au moment où la planète éclipsée entre dans l'ombre ou en sort; mais, au voisinage de cette ombre, la planète ne reçoit qu'une certaine partie de la lumière du soleil; ce qui produit une *penombre*, un affaiblissement de lumiè-

re, qui va en augmentant à mesure que la planète approche de l'ombre véritable, puis en diminuant lorsqu'elle s'en éloigne.

Tous ces effets que je viens d'indiquer en gros, se calculent avec précision, comme on peut le voir dans les livres d'astronomie.

Dans les temps anciens, les éclipses de lune et de soleil étaient un objet d'étonnement et d'admiration pour les peuples : on portait un grand respect aux astronomes qui savaient les prédire; mais ces prédictions étaient nécessairement très-imparfaites, parce qu'on ne connaissait pas alors les mouvemens du soleil et de la lune avec une précision suffisante. Cette théorie s'est perfectionnée par degrés, surtout dans cette quatrième période. Parmi les astronomes à qui elle en est principalement redevable, on cite les Cassini, Flamsteed, Halley, La Hire, le chevalier de Louville, Le Monnier, Lacaille, etc.

La méthode du chevalier de Louville mérite une attention particulière, en ce qu'elle contient la première application qu'on ait faite du calcul analytique à cet objet. L'auteur donne des formules d'un usage simple et commode pour les éclipses de lune : il n'a pas été aussi heureux pour les éclipses de soleil, où il est obligé de prendre un détour un peu plus long pour arriver à son but. Cette matière a été plus approfondie, plus généralisée et

LOUVILLE, né en 1671, mort en 1732.

Ac. de Paris, 1724.

Duséjour, né en 1733, mort en 1794. plus facilitée par Dionis Duséjour, membre de l'académie des sciences, dans son bel ouvrage intitulé : *Traité des mouvemens célestes*, 1784.

Les planètes, qui ont des satellites, offrent des phénomènes d'éclipses entièrement semblables à ceux de la lune et du soleil. Nous avons remarqué les services importans que les éclipses des satellites de Jupiter ont rendus et rendent encore tous les jours à la navigation.

SECTION II.

Parallaxes et réfractions.

I.

Parallaxes. J'ai rapporté, sous l'année 1672, le résultat des observations correspondantes qui furent faites alors en France et à Cayenne, sur les parallaxes des planètes. En 1751, La Caille, l'un des plus savans astronomes de notre académie des sciences, fut envoyé au cap de Bonne-Espérance, pour y faire diverses observations astronomiques. Son objet principal était de déterminer la parallaxe horizontale du soleil, et ce qui en est la suite, la distance de cet astre à la terre, au moyen d'observations immédiates sur les parallaxes de Mars et de Vénus,

La Caille, né en 1713, mort en 1762.

Ac. de Paris, 1760.

pendant que les astronomes d'Europe en feraient de semblables de leur côté. On avait ici l'avantage de s'appuyer sur une base beaucoup plus grande que toutes celles qui avaient été employées précédemment, la ville du Cap, où La Caille observait étant située à 33 degrés 55 minutes de latitude australe. Le succès de toutes ces opérations fut complet.

Après avoir réduit au méridien du Cap les observations de Mars, faites en Europe, La Caille en compara quarante-trois avec les siennes propres; et il trouva, en prenant un milieu, que la parallaxe horizontale de Mars, en opposition avec le soleil, le 14 septembre 1751, devait être presque de 27 secondes *. Or, ce même jour, les distances de Mars, et du soleil à la terre, étaient entr'elles, suivant les meilleures tables astronomiques, comme les nombres 3841 et 10047; d'où il est aisé de conclure, par le calcul trigonométrique, que la parallaxe horizontale du soleil était d'environ 10 secondes, et sa distance à la terre de 20627 demi-diamètres du globe terrestre.

La parallaxe horizontale de Vénus fut trouvée de 36 secondes; ce qui donne également 10 secondes environ pour celle du soleil, et 20627

---

* Je néglige toujours les très-petites fractions dans ces calculs.

demi-diamètres terrestres pour la distance du soleil à la terre. Ce résultat fut confirmé par les observations que La Caille fit des hauteurs méridiennes du soleil et de l'étoile d'arcturus.

On verra dans la suite que les observations du passage de Vénus sur le soleil tendent à diminuer de plus d'une seconde la quantité précédente de la parallaxe horizontale du soleil. Si on la suppose de 8 secondes, avec quelques astronomes, on trouvera que la distance du soleil à la terre est de 25784 demi-diamètres du globe terrestre.

Parallaxe horizontale de la lune.

La détermination de la parallaxe horizontale de la lune fut un autre fruit du voyage de La Caille. Dans la recherche de la parallaxe du soleil, il est permis de regarder le globe terrestre comme une sphère parfaite. Il n'en est pas de même pour la lune. La forme sphéroïdale de la terre influe ici sensiblement sur les résultats. Un observateur placé à l'un des pôles de la terre, trouverait, en parité des autres circonstances, une parallaxe sensiblement moindre, pour la lune, que s'il était placé à l'équateur. Il y a une autre cause encore plus grande de variations dans les parallaxes lunaires; elle provient des inégalités successives de distances de la lune à la terre, à raison de l'ellipticité considérable de l'orbite lunaire. La Caille a eu égard à tous ces élémens dans ses calculs. Il trouve, par la comparaison de ses observations avec celles d'Europe,

que la plus petite parallaxe horizontale de la lune est de 53 minutes 56 secondes, et la plus grande de 61 minutes 32 secondes; ce qui donne 57 minutes 44 secondes pour la parallaxe moyenne arithmétique. Les distances de la lune à la terre correspondantes à ces trois parallaxes, sont en demi-diamètres du globe terrestre, 64, 56, 59, sauf les petites fractions négligées.

Toutes les parallaxes dont j'ai parlé jusqu'ici se mesurent par des arcs de grands cercles qui passent par le zénith de l'observateur. On les appelle *parallaxes de hauteur*. Elles affectent plus ou moins les *déclinaisons* des astres, les *ascensions droites*, les *latitudes* et les *longitudes* : quantités qui se trouvent par la résolution de quelques triangles sphériques.

II.

Réfractions.

Le globe terrestre est environné de tous côtés d'une atmosphère que les rayons envoyés d'un astre, sont obligés de traverser pour arriver à nos yeux. Si l'observateur était placé au centre de la terre, les rayons directs entrant alors perpendiculairement à la surface extérieure de l'atmosphère, seraient seulement arrêtés en partie par le choc contre les particules atmosphériques; les autres éprouveraient les mêmes déviations dans leurs routes; de sorte que l'astre serait vu à sa vraie place dans le ciel.

Mais l'observateur est placé à la surface de la terre, et à l'exception du seul cas où l'astre répondrait au zénith de l'observateur, ce qui revient au cas précédent, les rayons traversent obliquement l'atmosphère; et passant successivement d'un milieu dans un autre plus dense, se brisent en approchant de la perpendiculaire, ou du rayon de chaque couche atmosphérique, et font paraître l'astre plus haut qu'il n'est réellement: effet contraire à celui des parallaxes.

La partie basse de l'atmosphère, celle qui avoisine la terre, est composée d'un air épais, mêlé de vapeurs étrangères; d'où résultent des réfractions considérables et fort inconstantes: elles diminuent dans la partie supérieure, et deviennent plus régulières à mesure que l'air devient plus pur, plus homogène, comme sur les montagnes, ou lorsqu'il est raréfié par la chaleur, comme dans le voisinage de la ligne équinoxiale.

Les réfractions n'affectent pas seulement la position apparente des astres qui sont au-dessus de l'horizon; elles se font sentir lorsqu'ils en sont à une certaine proximité en-dessous; elles produisent, par exemple, le *crépuscule* du matin et celui du soir. Le soleil étant à 18 degrés environ au-dessous de l'horizon, soit avant son lever, soit après son coucher, nous commençons à apercevoir sa lumière qui se brise dans l'atmosphère, et nous est

envoyée par réflexion en plus ou moins grande quantité, selon qu'il est plus ou moins près de l'horizon. La durée du plus petit crépuscule pour un lieu dont la latitude est donnée, se détermine par la méthode *de maximis et minimis*, comme je l'ai déjà remarqué.

III.

Les astronomes et les géomètres ont fait les derniers efforts pour découvrir la loi des décroissemens de la réfraction depuis l'horizon jusqu'au zénith, afin de connaître l'influence de cette cause sur la position apparente des astres ; mais ils n'ont pas encore pu y parvenir d'une manière absolument certaine et dégagée de toute supposition systématique. Méthode pour découvrir la loi des réfractions.

Dominique Cassini avait construit une table des réfractions astronomiques, par une méthode où il faisait entrer l'angle d'élévation de l'astre au-dessus de l'horizon, et les densités de l'atmosphère auxquelles il attribuait une variation assujétie à une loi constante et régulière. Il partait de quelques observations immédiates et fondamentales, faites près de l'horizon où les réfractions sont les plus grandes, afin que les erreurs des calculs comparatifs allassent toujours en diminuant jusqu'au zénith. On a fait usage pendant long-temps de ces tables, dans le livre de *la Connaissance des temps*.

J. Cassini, né en 1677, mort en 1756. Ac. de Paris, 1714.

La même méthode a été suivie et perfectionnée par Jacques Cassini, fils de Dominique. Deux observations immédiates en forment le principe fondamental : l'une, que la réfraction astronomique est de 32 minutes 20 secondes à l'horizon; l'autre, qu'elle est de 5 minutes 28 secondes, à 10 degrés de hauteur. Ensuite Jacques Cassini suppose qu'à une certaine hauteur, qu'il appelle *hauteur de la couche*, ou *surface réfractive*, la réfraction est comme nulle; de sorte qu'à partir de cette surface, et en approchant de la terre, le rayon doit décrire une certaine ligne *donnée*, en satisfaisant aux deux observations mentionnées. Il essaye successivement de prendre pour cette ligne donnée une simple ligne droite, un arc de cercle, et un arc de parabole. Dans le premier cas, la hauteur de la surface réfractive serait seulement de 2000 toises; dans les deux autres, les hauteurs de la surface réfractive seraient à peu près égales, et chacune d'environ 6918 toises. Enfin l'auteur construit dans ces trois hypothèses une table de réfractions depuis l'horizon jusqu'à 40 degrés d'élévation. La seconde hypothèse donne les résultats qui s'éloignent le moins de la vérité. Il est fâcheux que tous ces calculs portent sur des bases précaires et peu naturelles.

IV.

De grands géomètres ont traité la partie théori-

que du problème, d'une manière bien plus profonde et plus satisfaisante. Huguens avait démontré dans sa dissertation *de Lumine*, que si un rayon lumineux traverse obliquement un milieu diaphane, composé de couches planes et horizontales, inégalement denses, avec des vitesses réciproquement proportionnelles aux densités, en sorte que la plus grande vitesse soit là où est la moindre densité, *et vice versa*, ce rayon arrivera d'un point à un autre dans un *minimum* de temps. Mais il n'avait pas nommé la courbe que le rayon décrira. Jean Bernoulli acheva la solution. En considérant que les sinus de réfraction sont comme les sinus des angles que forment les élémens de la courbe avec la verticale, et que par conséquent les vitesses du rayon sont ici comme ces derniers sinus, il rappela le problème à celui de trouver la courbe que doit décrire un corps pesant, en supposant que le sinus de l'angle que cette courbe fait en chaque point avec la verticale, soit proportionnel à la vitesse correspondante du mobile. Or, dans ce second problème, les vitesses sont comme les racines des hauteurs; d'où il est aisé de conclure que la courbe cherchée est un arc de cycloïde. Tout cela est fort ingénieux, mais ne peut guère s'appliquer au sujet présent. Les couches de l'atmosphère ne sont point planes; elles

An 1690. V. Hug. Op. tom. III.

Joh. Bern. Op. tom. I, pag. 190.

ont la forme sphérique, et la loi attribuée aux vitesses du rayon lumineux n'est qu'une hypothèse.

Taylor, dans son livre *Methodus incrementorum*, résout le problème d'une manière plus directe et plus conforme à la nature des choses. Il détermine la courbe que doit décrire le rayon lumineux, en supposant que l'atmosphère est composée de couches circulaires; que la densité de chaque endroit est proportionnelle à la pression, suivant la règle de Mariotte; que cette pression est égale au poids de la colonne atmosphérique correspondante; que la pesanteur de chaque point matériel de l'atmosphère est comme le carré inverse de sa distance au centre de la terre; et qu'enfin les sinus de réfraction sont proportionnels aux densités des couches. Les formules auxquelles il parvient d'après ces *données*, ne sont pas trop compliquées pour les géomètres; elles le sont trop pour les opérations ordinaires du calcul astronomique, et je ne vois pas qu'on en ait fait usage.

On trouve, dans l'*Hydrodynamique* de Daniel Bernoulli, une autre solution très-élégante du même problème, mais également difficile à employer dans la pratique de l'astronomie.

Prix de l'ac. 1729, et Mém. de l'ac. 1749. Bouguer, qui joignait à cette pratique de profondes connaissances théoriques, profitant de quelques circonstances qui simplifient la question,

sans la dénaturer, a mieux atteint le but utile. Il regarde l'atmosphère comme formée de couches sphériques et concentriques au globe terrestre, et il observe que dans la partie supérieure et extrême où ce fluide est extrêmement rare, la réfraction est comme nulle, et peut être négligée. Lorsqu'à partir du point où l'on suppose que le pouvoir refringent commence à se faire sentir, et que le rayon, en passant successivement d'une couche à la couche voisine inférieure, change continuellement de direction; l'auteur construit une courbe dont l'axe des abscisses est vertical, et dont les ordonnées représentent les densités de la matière réfractive, ou les sinus de réfraction. Or, d'un autre côté, ces sinus sont eux-mêmes continuellement proportionnels aux perpendiculaires menées du centre de la terre sur les tangentes de la courbe que décrit le rayon. Il existe donc une liaison réciproque entre la courbe des densités et la courbe du rayon; de telle sorte que connaissant l'une de ces courbes, on connaîtrait l'autre. Par une suite de considérations géométriques et physiques sur la nature du problème, et en négligeant quelques circonstances inutiles à considérer dans les opérations pratiques du calcul, Bouguer trouve qu'on peut toujours regarder la courbe des densités comme une parabole d'un ordre plus ou moins élevé. De là il construisit une nouvelle *table* des

réfractions astronomiques, qui fut jugée alors plus exacte qu'aucune de celles que l'on connaissait.

L'auteur ayant été envoyé au Pérou pour la mesure de la terre, comme on le verra ci-dessous, eut occasion de faire une remarque importante et nouvelle sur les réfractions. On croyait auparavant que les réfractions astronomiques devenaient plus grandes à mesure que l'observateur s'élevait plus haut au-dessus du niveau de la mer. Bouguer a trouvé le contraire par la comparaison d'un grand nombre d'observations faites au niveau de la mer, et sur les plus hautes montagnes du Pérou. Je pourrais encore citer de lui plusieurs autres remarques curieuses et utiles sur le même sujet; mais le temps me presse, et je renvoie le lecteur aux mémoires de l'académie pour l'année 1749.

Les réfractions sont sujettes à tant d'inégalités, à tant d'anomalies, et la connaissance en est tellement importante dans la pratique de l'astronomie, qu'on ne saurait trop s'appliquer à constater exactement leurs effets. C'est dans cette vue que La Caille a fait une longue suite d'observations, tant à Paris que dans son voyage au cap de Bonne-Espérance. Sa méthode est fort simple : elle est fondée sur cette considération, que s'il n'y avait point de réfraction, la distance véritable de deux parallèles (ici les parallèles de Paris et du cap de Bonne-Espérance), se déduirait directement de la simple comparai-

Ac. de Paris, 1751 et 1755.

son de deux hauteurs méridiennes d'une même étoile, observées l'une à Paris, l'autre au Cap; et que s'il n'y avait de réfraction qu'à l'un de ces deux endroits, comme s'il n'y en avait qu'au Cap, il résulterait de cette comparaison une distance de parallèles qui ne serait altérée que par la réfraction au Cap. Si donc on est parvenu, par quelque moyen que ce soit, à connaître la vraie distance de ces parallèles, la différence entre la distance véritable et celle qui est altérée par la réfraction, donnera cette réfraction. Or, il y a une très-grande variété à cet égard entre les résultats des observations de différentes étoiles. La Caille a employé plus de trois cents observations comparatives faites à Paris et au Cap; et, en profitant de quelques circonstances heureuses que fournissent les positions respectives de Paris et du Cap sur la surface du globe, il est parvenu à construire une *table* de réfractions, qui diffère quelquefois beaucoup des tables précédentes, et qui est fort estimée.

Quoique les observations forment essentiellement la base de la théorie des réfractions astronomiques, on a toujours besoin de la géométrie pour découvrir leurs relations mutuelles à différentes hauteurs, et pour les lier à la loi de continuité. Thomas Simpson, célèbre géomètre anglais, a donc bien mérité des astronomes, en leur fournissant à cet égard une formule commode et assez

SIMPSON, né en 1710, mort en 1760.

simple, dans son récueil intitulé : *Mathematical dissertations*, 1743. Elle s'énonce ainsi : *Multipliez par un coefficient constant la distance apparente de l'astre au zénith, et égalez le produit au sinus d'un angle qui est la différence entre la distance de l'astre au zénith, et le produit de l'angle de la réfraction multiplié par un autre coefficient constant :* équation par laquelle on voit que les deux coefficiens constans étant supposés connus, on trouvera l'angle de réfraction, soit par le retour des suites, soit par des tâtonnemens, ou par ces fausses positions si fort en usage dans l'astronomie pratique. Simpson détermine les deux coefficiens dont il s'agit, par deux observations immédiates ; l'une, que la réfraction est de 33 minutes à l'horizon ; l'autre, qu'elle est d'une minute 30 secondes à 31 degrés d'élévation au-dessus de l'horizon.

Bradley, né en 1692, mort en 1762.

Quelque temps avant sa mort, Bradley donna une autre formule encore plus simple, et d'une grande exactitude : selon cette règle, *le petit angle de la réfraction est proportionnel à la tangente de la différence entre la distance apparente de l'astre au zénith, et le triple de l'angle de la réfraction.* D'où l'on tire l'angle de réfraction par des procédés semblables à ceux qu'on vient d'indiquer pour la règle de Simpson.

SECTION III.

Aberration apparente des étoiles fixes. Nutation de l'axe de la terre.

Les deux grandes découvertes dont j'ai à rendre compte ici, sont dues au même Bradley, et l'ont fait regarder comme l'Hipparque de l'Angleterre.

I.

Parmi les raisons qu'on allégua dans le temps contre le système de Copernic, on disait, comme nous l'avons déjà rapporté, que si la terre tourne en effet autour du soleil, elle doit faire paraître une parallaxe dans les étoiles, lorsqu'elle passe d'un point de son orbite au point diamétralement opposé; ce qu'on ne remarquait aucunement. L'objection était forte; quoique Copernic et Galilée y eussent répondu d'une manière très-plausible, on la voyait encore reparaître de temps en temps. Elle aurait été détruite radicalement, si l'on avait pu découvrir enfin que les étoiles fussent sujettes à la parallaxe du grand orbe. Les astronomes suivans, persuadés qu'une telle parallaxe avait lieu, employèrent tous les moyens d'en reconnaître la

Aberration des étoiles.

quantité; quelques-uns crurent l'avoir fixée, et se hasardèrent à dire qu'elle était de 4 à 5 secondes; les autres en plus grand nombre, appuyés sur les observations les plus précises, la trouvèrent absolument insensible, et enfin cette dernière opinion prévalut; mais elle ne renversa point le système de Copernic. On en revint à la réponse qu'il avait faite, que la distance de la terre aux étoiles fixes était si prodigieusement grande, qu'il fallait la regarder comme infinie par rapport au diamètre de l'orbite terrestre. Cependant il restait toujours à expliquer certains mouvemens sensibles que l'on observait dans les étoiles, et contraires, pour la plupart, à ceux qu'auraient dû faire paraître la parallaxe du grand orbe pour les étoiles, et la précession des équinoxes. On désignait ces mouvemens irréguliers sous la dénomination générale d'*aberrations apparentes des étoiles fixes*. Ne sachant à quoi les attribuer, les astronomes prenaient toutes les précautions pour éviter les erreurs qu'ils auraient pu introduire dans la détermination du mouvement des planètes par rapport aux étoiles.

Molyneux, astronome irlandais, entreprit, en 1725, de déterminer ces mouvemens d'aberration; il les observa à Kew, dans le voisinage de Londres, avec un excellent secteur de Graham; mais il ne put parvenir à les soumettre à des lois générales.

Bradley fut plus heureux. Excellent observateur, savant géomètre, il suivit dans le même lieu la même recherche, avec une constance qui le conduisit enfin à la parfaite connaissance de tous ces phénomènes singuliers. Il reconnut que certaines étoiles paraissaient avoir, dans l'espace d'un an, une espèce de balancement en longitude, sans changer en aucune manière de latitude; que d'autres variaient seulement en latitude; et qu'enfin d'autres (et c'était le plus grand nombre) paraissaient décrire dans le ciel, pendant l'espace d'une année, une petite ellipse plus ou moins allongée. Cette période *d'une année*, à laquelle répondaient tous ces mouvemens, quoique d'ailleurs si différens, était un indice certain qu'ils avaient quelques rapports avec le mouvement de la terre dans son orbite autour du soleil; mais cela n'était encore qu'un aperçu général, insuffisant pour rendre une raison précise et complète des phénomènes. Bradley fit un nouveau pas qui décida la question; il conçut la belle pensée, que l'aberration apparente des étoiles fixes est produite par la combinaison du mouvement progressif de la lumière avec le mouvement annuel de la terre; il y arriva en se faisant à lui-même ce raisonnement :

La théorie de Roëmer m'apprend que la vitesse de la lumière n'est pas instantanée, et qu'elle a un

rapport fini, environ celui de 10000 à 1, à la vitesse de la terre dans son orbite autour du soleil; donc un rayon de lumière, parti d'une étoile, et apportant l'impression de cette étoile à mon œil, n'arrive qu'après que la terre a changé sensiblement de place depuis l'instant où il est parti : ainsi, quand mon œil reçoit le coup, il doit rapporter l'étoile à un endroit différent de celui où il l'aurait rapportée, si j'étais toujours resté à la même place. Un observateur terrestre ne voit donc pas les étoiles à leurs véritables places dans le ciel, et il doit leur attribuer différens mouvemens qui dépendent des différentes positions qu'elles ont par rapport à lui.

Muni de cette clef, Bradley expliqua tous les mouvemens d'aberrations apparentes des étoiles fixes, d'une manière exacte, précise, conforme à ses propres observations et à celles de tous les autres astronomes. Dès lors toutes les incertitudes furent dissipées. On ne fut plus embarrassé à écarter du mouvement des planètes, ces illusions produites par les aberrations apparentes des étoiles fixes. A cet avantage se joignit une nouvelle preuve du système de Copernic. La part principale et exclusive qu'a la terre dans l'explication de Bradley, est une démonstration presque mathématique, qu'en effet la terre tourne autour du soleil, et non pas le soleil autour de la terre.

Non content d'avoir jeté les fondemens de cette théorie par les observations, il la réduisit en formules trigonométriques, dont il publia les résultats, sans démonstrations, dans les *Transactions philosophiques* de la société royale de Londres. An 1727.

La nouveauté et l'intérêt du sujet attirèrent l'attention des astronomes et des géomètres. Clairaut donna les démonstrations que Bradley avait supprimées; et il y joignit plusieurs autres théorèmes d'un usage facile et commode : service important qui n'a pas peu contribué à accélérer les progrès de cette nouvelle branche de l'astronomie. Ac. de Paris, 1737.

Environ dix ans après, le même géomètre appliqua la théorie de l'aberration au mouvement des planètes et des comètes. On sent en effet qu'elle y doit avoir également lieu. Le temps que la lumière met à venir d'une planète ou d'une comète à la terre, produit nécessairement quelque changement apparent dans la position de la planète ou de la comète. Le problème est donc ici de même nature que pour les étoiles, avec cette différence néanmoins que les étoiles étant fixes, au lieu que les planètes et les comètes ont des mouvemens dont il faut tenir compte, les formules d'aberration sont un peu plus compliquées pour les planètes et les comètes, que pour les étoiles. A quoi on doit surtout ajouter la dificulté de calcul, qui provient de l'excentricité des orbites planétaires ou cométaires. Ac. de Paris, 1746.

II.

Nutation de l'axe de la terre.

La nutation de l'axe de la terre est un autre phénomène remarquable, que Bradley découvrit avec le secours de la géométrie et des observations.

Instruit en général que les inégalités des attractions de la lune ou du soleil sur les différentes parties du sphéroïde terrestre, devaient faire prendre divers mouvemens à son axe, par rapport au plan de l'écliptique, Bradley s'attacha à reconnaître et à démêler ces mouvemens, par une longue suite d'observations pénibles et délicates, faites dans les positions du soleil et de la lune, les plus propres à manifester les effets qu'il cherchait. Il trouva 1.° que l'axe de la terre a un mouvement conique, par lequel ses extrémités décrivent autour des pôles de l'écliptique, et contre l'ordre des signes, un cercle entier en 25900 ans, ou un arc d'environ 50 secondes en un an : ce qui produit la précession des équinoxes ; 2.° que ce même axe a, par rapport au plan de l'écliptique, un mouvement de libration ou de balancement alternatif, par lequel il s'incline d'environ 18 secondes pendant une révolution des nœuds de la lune, laquelle se fait, contre l'ordre des signes, dans l'espace d'environ 19 ans ; après quoi il revient à sa première position, pour s'incliner de nouveau ; ainsi de suite. Ces observations, conformes au système de l'at-

An 1747.

traction neutonienne, en sont une nouvelle démonstration, comme je le remarquerai plus expressément dans la suite. Depuis ces découvertes, la nutation de l'axe de la terre entre dans le calcul astronomique aussi essentiellement que la précession des équinoxes, dont on connaissait déjà à peu près la quantité avant cet astronome.

SECTION IV.

Figure de la terre par les observations. Description géographique de la France.

I.

La question de la figure de la terre, par des mesures immédiates, est une autre branche de l'astronomie pratique, qui a reçu son éclat et sa perfection dans le siècle passé. Je crains bien qu'on ne trouve un peu de longueur dans les détails suivans; mais il m'a été impossible de me rendre plus court.

Picard avait trouvé, comme nous l'avons vu, que la longueur du degré d'un méridien terrestre est de 57060 toises, par une latitude boréale de 49 degrés 23 minutes. Quoique cette détermination fût regardée comme beaucoup plus exacte

que toutes les précédentes, elle laissait néanmoins encore quelqu'incertitude, tant par rapport à la mesure géodesique, qu'à la mesure astronomique. L'auteur avait employé treize triangles sur une étendue d'environ 32 lieues, pour calculer la longueur d'un degré. Or, ne pouvait-il pas s'être glissé quelques erreurs dans les résolutions trigonométriques de tant de triangles? D'un autre côté, les meilleurs instrumens, alors connus, ne pouvaient donner qu'à quatre secondes près la valeur de l'arc céleste, correspondant à l'arc terrestre; et ces quatre secondes rapportées sur la terre valent près de soixante-six toises. Enfin, un seul degré ne pouvait pas suffire pour faire connaître si la terre est sphérique, ou si elle ne s'écarte pas sensiblement de cette figure.

Ces considérations ayant été présentées au gouvernement français, toujours porté à favoriser le progrès des sciences, il ordonna que non-seulement la mesure de Picard serait vérifiée, mais encore que la méridienne serait prolongée à travers la France jusqu'à Dunkerque vers le nord, et jus-
An 1683. qu'à Colioure vers le midi; ce qui comprenait une étendue d'environ 8 degrés. La Hire fut chargé de
An 1701. la partie du nord; Dominique Cassini de celle du midi, dans laquelle il fut ensuite aidé par son fils Jacques Cassini : il résulta de toutes ces opérations, que la longueur moyenne du degré terres-

tre, en France, était de 57051 toises, plus grande d'environ une toise que celle de Picard.

Les auteurs de ces nouvelles mesures, persuadés, par l'expérience du raccourcissement du pendule à Cayenne, et par les théories de Huguens et de Neuton, que la terre était un sphéroïde applati vers les pôles, mais égarés par une fausse application de la géométrie, qui leur fit croire que dans un tel sphéroïde, les degrés terrestres doivent diminuer de longueur, en allant du midi au nord, ne se tinrent peut-être pas assez en garde contre les sources d'illusion que ce préjugé pouvait faire naître. Soit par cette cause, ou par le défaut de justesse de leurs instrumens, ou par quelques-unes de ces petites erreurs presqu'inévitables dans une longue suite d'observations pénibles, ils trouvèrent que les degrés terrestres diminuaient en effet de longueur du midi au nord; et ils se hâtèrent de publier ce résultat avec d'autant plus de confiance, qu'ils croyaient par là confirmer l'aplatissement de la terre, que l'on regardait comme très-probable.

Le problème paraissait ainsi complètement résolu : on demeura pendant plusieurs années dans la persuasion, que les observations s'accordaient avec la théorie, du moins quant à la conséquence générale; mais enfin les géomètres vinrent troubler cette tranquillité : ils démontrèrent que cet accord prétendu des observations avec la théorie était

fondé sur un paralogisme de géométrie, et que dans un sphéroïde aplati vers les pôles, les degrés de latitude devaient augmenter en longueur du midi au nord, et diminuer au contraire dans un sphéroïde allongé. En effet, on voit, sans le secours d'aucune figure de géométrie, que dans le sphéroïde aplati, le méridien terrestre étant plus courbe auprès de l'équateur qu'auprès du pôle, la longueur d'un arc terrestre d'un degré, correspondant à un arc céleste d'un degré, doit aller en augmentant à mesure que la courbure du méridien terrestre diminue, ou à mesure qu'on avance vers le pôle. Le contraire doit avoir lieu pour le sphéroïde allongé. La vérité de ce raisonnement, si simple et si concluant, ne pouvait manquer de frapper bientôt tous les esprits. Alors les auteurs des nouvelles mesures furent fort embarrassés. D'un côté, ne pouvant rejeter les démonstrations qu'on leur opposait, de l'autre, ne voulant pas abandonner des observations qu'ils regardaient comme très-certaines, ils furent enfin réduits à dire que la terre était un sphéroïde allongé vers les pôles. De nouvelles mesures, prises également en France, aux années 1733 et 1736, semblaient fortifier l'opinion que les longueurs des degrés terrestres diminuaient du midi au nord. La terre fut donc, pendant l'espace d'environ quarante ans, un

sphéroïde allongé, du moins en France, en dépit de Huguens et de Neuton.

Cependant les géomètres n'étaient pas convaincus. Ils renouvelaient de temps en temps leurs protestations contre un système qu'ils ne pouvaient concilier avec les lois de l'hydrostatique : ils soutenaient qu'en supposant même que les observations faites en France eussent toute l'exactitude possible, les différences entre les degrés consécutifs étaient trop petites pour être parfaitement saisies; que les erreurs pouvaient s'accumuler de proche en proche dans le même sens, au moins en grande partie; et qu'on ne pouvait obtenir les rapports des degrés, d'une manière bien marquée et suffisante, que par la comparaison de degrés mesurés en des endroits très-éloignés les uns des autres, dans le sens du méridien. Des réclamations si bien motivées furent enfin écoutées du gouvernement français. Le comte de Maurepas, alors ministre de l'académie des sciences, ordonna que des mathématiciens iraient mesurer le degré du méridien au Pérou, dans le voisinage de l'équateur, tandis que d'autres iraient faire une semblable opération en Laponie, sous le cercle polaire.

Godin, Bouguer et La Condamine partirent pour le premier voyage en 1735; l'année suivante, Maupertuis, Clairaut, Camus et Le Monnier, auxquels se joignirent l'abbé Outhier, correspondant

de l'académie, et Celsius, professeur d'astronomie à Upsal, allèrent en Laponie. Les premiers éprouvèrent toutes sortes de contrariétés et de retardemens dans leurs opérations, et ne purent revenir en France qu'environ sept ans après leur départ; les autres eurent toutes choses prospères; leur ouvrage fut commencé et achevé en très-peu de temps; ils rentrèrent dans leurs pays au bout de quinze à seize mois d'absence.

Il semble qu'on aurait dû attendre le retour des académiciens du Pérou, pour rendre un compte général et concerté d'opérations toutes entreprises dans la même vue; c'était l'avis des savans modérés et justes. Maupertuis, chef des observateurs du nord, homme ardent à faire du bruit, rejeta une proposition qui contrariait sa petite ambition. Il n'eut rien de plus pressé que d'annonçer partout, à l'académie, au public, dans le grand monde où il était fort répandu, le résultat d'une opération dont il s'appropriait en quelque sorte toute la gloire, et à laquelle néanmoins il n'avait eu qu'une part médiocre comme collaborateur. Ce résultat était que la longueur du degré du méridien, sous le cercle polaire, est de 57438 toises. En la comparant avec celle du degré moyen en France, qui est de 57061 toises, on voit que les longueurs des degrés terrestres augmentent très-sensiblement, du midi

au nord, et que par conséquent la terre est un sphéroïde aplati vers les poles. Aussitôt les nombreux partisans de Maupertuis adoptent et répandent cette conclusion avec enthousiasme; il est exalté, comme s'il eût apporté aux hommes une vérité nouvelle et extraordinaire; on ne l'appelait plus que *l'aplatisseur de la terre;* lui-même se fit peindre en habit de Lapon, s'appuyant sur le globe terrestre comme pour lui faire prendre la figure sphéroïdale accourcie; et Voltaire, alors son ami, mit au bas de l'estampe quatre vers qu'on admira alors, et qu'on a plus justement oubliés dans la suite*. Mais tous ces pompeux éloges d'une expérience qui ne faisoit, dans le fond, que confirmer les théories de Huguens et de Neuton, étaient d'autant plus déplacés, d'autant plus prématurés, que si par hasard la mesure du Pérou, que l'on ne connaissait pas encore, fût venue à donner le degré du méridien plus long, ou seulement à peu près le même au Pérou qu'en France, la question serait retombée dans un état d'indécision pire que jamais.

* Les voici :

Ce globe mal connu, qu'il a su mesurer,
Devient un monument où sa gloire se fonde :
Son sort est de fixer *la figure du monde*,
De lui plaire et de l'éclairer.

Les Cassini, auteurs du système de la terre allongée, se tinrent pendant quelque temps sur la réserve ; mais voyant enfin que leur édifice, élevé si lentement, avec tant de soins, tant de dépenses, menaçait ruine de jour en jour, et toujours persuadés, par les observations faites en France, que la longueur des degrés terrestres allait en diminuant de l'équateur au pôle, ils se crurent fondés en droit et en raison d'attaquer l'opération du nord. Ils publièrent, ou firent publier, entr'autres, un écrit véhément, dans lequel on soutenait que l'arc de 57 minutes seulement, mesuré au cercle polaire, était trop petit pour en tirer aucune conséquence certaine ; que dans ces sortes d'opérations il fallait employer les plus grands arcs possibles, afin que les erreurs, se répandant sur un grand espace, devinssent comme insensibles ; qu'à la vérité on n'aurait pu guère prolonger l'arc vers le nord, mais qu'on le pouvait vers le midi, et que tel avait été en effet l'avis de Camus, le plus utile peut-être des collaborateurs, avis auquel Maupertuis, pressé de finir et de jouir, s'était formellement opposé ; que lorsqu'il s'agissait de mesurer de petits arcs terrestres, il était de la dernière importance de placer l'instrument exactement dans le plan du méridien, et qu'on ne voyait pas les moyens que les observateurs du nord avaient pris pour remplir cette condition essentielle ; qu'ils ne s'étaient pas

assez prémunis contre les déviations du fil à plomb, que le voisinage des montagnes pouvait occasionner; que dans la suite des triangles de *Tornéo à Kittis*, il se trouvait plusieurs angles extrêmement aigus, source des plus grandes erreurs; qu'on avait opéré sur un terrain fort incommode à plusieurs égards, et par un froid rigoureux qui pouvait avoir fait négliger plusieurs précautions nécessaires pour l'exactitude, etc. D'où l'on concluait que cette mesure ne pouvait pas entrer en comparaison avec celles de France, où l'on avait employé des arcs de plusieurs degrés, et des instrumens excellens, avec toutes les attentions imaginables, dans un pays et sous un ciel qui ne laissait à désirer aucune commodité locale.

On juge bien qu'une telle critique ne demeura pas sans réponse. Celsius, l'un des adjoints aux académiciens du nord, y opposa un mémoire très-vif, où, non content de justifier l'opération du nord, il se permit des personnalités grossières contre les auteurs de la mesure de France; il n'eut pas honte d'accuser Jacques Cassini d'avoir écarté lui-même quelques-unes de ses propres observations, qui tendaient à faire la terre aplatie : imputation odieuse, dénuée de preuves, et reçue avec indignation par tous les honnêtes gens. Si le sort d'une cause, bonne ou mauvaise, pouvait dépandre de la manière dont elle est défendue, rien n'était plus mal ima-

giné, ni plus dépourvu du tact des convenances, que le procédé de Celsius.

Maupertuis, caché derrière le rideau, employa un autre moyen, bien plus adroit et plus efficace, pour combattre ses adversaires. En 1738, il fit paraître un écrit anonyme intitulé : *Examen désintéressé des différens ouvrages qui ont été faits pour déterminer la figure de la terre.* D'abord on crut, malgré ce titre imposant, que le livre favorisait les Cassini, en voyant les louanges qu'on leur prodiguait, au point qu'eux-mêmes ou leurs amis furent soupçonnés d'en être les auteurs. Mais on ne tarda pas de reconnaître que le poison était caché sous les fleurs. Toute la prétendue impartialité de l'écrivain, enveloppée dans un système de raisonnemens entortillés et équivoques, aboutissait à cette conclusion alternative : Ou il faut admettre l'allongement de la terre, fondé sur cinq fameuses opérations, tandis que l'aplatissement n'en a encore qu'une seule en sa faveur; ou s'il arrive qu'on soit enfin forcé de reconnaître que la terre est aplatie, il faut supposer que MM. Cassini ont commis dans leurs mesures *des erreurs énormes, et telles qu'elles ne pourraient échapper aux astronomes les plus maladroits.* Mais ce dilemme insidieux fut rejeté, et démasqua l'auteur. Les indifférens trouvèrent ridicule de vouloir lier la réputation d'aussi grands astronomes que les

Cassini, à une opération dont les défauts, supposés réels, pouvaient avoir plusieurs causes très-naturelles, très-difficiles à démêler dans le temps, telles, par exemple, que l'imperfection, alors presqu'inévitable, des instrumens, l'aberration apparente des étoiles fixes, dont on ignorait les lois, la nutation de l'axe de la terre, quelques irrégularités dans les réfractions, et surtout les erreurs attachées à la mesure de degrés *consécutifs*, comme nous l'avons déjà observé : les parties intéressées ne se méprirent point aux malignes intentions de Maupertuis.

Il parut encore sur le même sujet d'autres écrits, où l'on remarquait plus l'amour-propre que l'amour de la vérité. Je ne veux pas les tirer de l'oubli; mais je ne puis passer sous silence une anecdote assez curieuse. Un ardent défenseur de la terre allongée, croyant avoir réfuté victorieusement le système contraire, ne voulut pas néanmoins livrer son manuscrit à l'imprimeur, avant de l'avoir communiqué à Fontenelle, dont l'autorité était d'un très-grand poids. Fontenelle lut l'ouvrage, et en le rendant à l'auteur, il lui conseilla de le publier. Celui-ci, un peu indécis, un peu incertain de l'opinion du juge, dit après un moment de silence : *Vous me donnez, monsieur, un conseil que vous n'avez pas suivi pour vous-même; on a beaucoup écrit contre vous, et jamais vous*

n'avez répondu...... Oh! répliqua finement le sage secrétaire de l'académie des sciences, *je n'étais pas si sûr que vous d'avoir raison.*

Dans ce combat scientifique, où les gens du monde même prirent parti, le système de la terre aplatie gagnait tous les jours le dessus, par le double avantage qu'il réunissait, d'être fondé sur la théorie des forces centrales, et sur des observations immédiates qui, même en leur refusant une extrême exactitude, ajoutaient ici un poids considérable dans la balance. D'ailleurs, quoique les académiciens du Pérou n'eussent pas encore achevé leur travail, on apprit par leurs lettres, pendant la dispute, que les degrés du méridien à l'équateur étaient moindres qu'en France. Tant de fortes probabilités en faveur de l'aplatissement de la terre, ébranlèrent les Cassini eux-mêmes. Leur austère probité, et les intérêts de cette astronomie qui leur devait tant de découvertes, tout les détermina à revenir sur leurs pas, et à reconnaître la nécessité de vérifier les degrés de France avec de nouveaux instrumens très-exacts, et avec l'attention la plus scrupuleuse à ne négliger aucun des élémens de la question, dans l'état où se trouvait alors l'astronomie.

Cés. Cassini, né en 1714, mort en 1784.

En 1739 et 1740, Cassini de Thury, fils de Jacques, et l'abbé de La Caille firent cette vérification. Ils étaient l'un et l'autre très-exercés à la pra-

tique de l'astronomie, très-instruits des nouvelles théories; et leurs opérations, auxquelles ils apportèrent les plus grands soins, ne pouvaient manquer de réussir, et d'obtenir toute la confiance qu'elles méritaient. Ils trouvèrent que la plus grande partie des degrés allait en augmentant du midi au nord, et qu'un petit nombre seulement paraissait diminuer. La conséquence qui suivait de là était en faveur de l'aplatissement de la terre. Il ne s'agissait plus que de la manifester dans une forme authentique. Cassini de Thury, du consentement de son digne père, eut le noble courage d'annoncer, dans une assemblée publique de l'académie des sciences, qu'il s'était glissé quelques erreurs dans les premières mesures des degrés de France, et de conclure que les nouvelles concouraient avec celles du nord à prouver que la terre était un sphéroïde aplati vers les pôles. Il publia tout ce travail en 1744, dans un livre intitulé : *Méridienne de l'observatoire royal, vérifiée, etc.* Alors la terre prit, du commun accord des astronomes, et à la grande satisfaction des géomètres, la figure aplatie qu'on lui avait disputée si long-temps.

Maupertuis aurait joui d'une gloire pure et tranquille, si, content d'avoir contribué un des premiers à cette révolution, il n'eût pas cherché à se l'attribuer toute entière, et à se faire un malheur de l'arrivée prochaine des académiciens du Pérou,

avec lesquels il faudrait discuter de nouveau la question. Les hommes instruits et désintéressés, quoique déjà persuadés de l'aplatissement de la terre, attendaient néanmoins ce retour avec une sorte d'impatience, pour prendre une plus parfaite connaissance de la figure et des dimensions du globe terrestre. On savait que Godin et Bouguer étaient des astronomes du premier ordre, et que de plus Bouguer était un très-grand géomètre; que La Condamine, sans égaler ses deux collègues en savoir, avait surmonté, par son zèle et son activité, une foule d'obstacles qui s'opposaient au succès des opérations. On avait donc tout lieu de penser que leurs travaux répandraient un nouveau jour sur cette matière. Les amis de Maupertuis s'efforçaient, par tous les moyens, de détruire ou d'affaiblir de si justes espérances : ils ne cessaient de répéter que le problème était résolu; que les mesures du Pérou n'apprendraient rien de nouveau, ou ne feraient tout au plus que confirmer des vérités déjà connues. On employait même, pour les combattre d'avance, l'arme du ridicule. Né caustique et mordant, Maupertuis disait dans les sociétés d'un monde frivole, pour qui une plaisanterie, bonne ou mauvaise, tient lieu de raison : *Lorsque les Péruviens arriveront, ils seront bien plus embarrassés de leur figure, que de la figure de la terre.* Tout cela fut inutile : malgré les intrigues et les

sarcasmes, les mesures du Pérou furent accueillies avec la distinction qui leur était due. Bouguer en rendit un compte sommaire dans une assemblée An 1744. publique de l'académie des sciences, peu de temps après son retour. Il exposa ensuite tout ce travail au long, avec les réflexions astronomiques et géométriques, qui en étaient la suite et la preuve, dans un livre exprès *sur la figure de la terre*. Arrêtons-An 1749. nous un moment sur cet ouvrage remarquable.

Les observateurs du Pérou se trouvant près de l'équateur, avaient l'avantage de pouvoir mesurer un arc de ce cercle, et le commencement d'un méridien. Si cette double mesure eût pu s'exécuter avec toute la précision nécessaire, elle aurait suffi seule pour déterminer le rapport des axes de la terre, sans rien emprunter des mesures de France et de Laponie; et d'ailleurs elle n'empêchait point qu'on ne les employât aussi au même objet. Mais supposé qu'on se déterminât à mesurer en effet un arc de l'équateur et un arc du méridien, par où fallait-il commencer? Godin et La Condamine voulaient que ce fût par l'équateur; Bouguer par le méridien. Il fit sentir à ses collègues, et il explique dans son livre, qu'il était comme impossible de mesurer un arc de l'équateur avec une précision suffisante; que les incertitudes inévitables dans les temps des apparitions des signaux terrestres ou célestes, qu'il fallait employer, pouvaient entraîner

des erreurs plus grandes que la quantité cherchée, c'est-à-dire, que la différence des axes de la terre; et que si enfin, après avoir consumé un temps considérable à cette opération, il arrivait, par quelqu'accident imprévu, qu'on ne pût pas mesurer un arc du méridien, l'objet principal du voyage serait manqué; au lieu que la mesure de l'arc du méridien était susceptible d'une exactitude beaucoup plus grande, plus facile à exécuter à raison des localités, et qu'après tout la comparaison des arcs du méridien, à différentes distances de l'équateur, donnerait toujours le rapport des axes de la terre, d'une manière plus approchante de la vérité, qu'on ne pourrait l'obtenir par la comparaison d'un arc de l'équateur avec un arc du méridien. D'où il concluait qu'il fallait d'abord s'assurer de l'arc du méridien. Cette opinion, fondée sur des raisons péremptoires, et soutenue d'ailleurs par des ordres arrivés de France, fut la règle du travail : on ne pensa même plus dans la suite à mesurer un arc de l'équateur.

Ce premier point arrêté, Bouguer ne s'occupe plus dans son livre que de la mesure du méridien. Il traite des triangles de la méridienne, considérés absolument, ou dans les plans différemment inclinés où ils peuvent se trouver; il apprend à rapporter toutes les lignes et tous les angles à l'horizon, en ayant égard aux réfractions et aux changemens

de direction des lignes verticales ; il examine le choix qu'on peut faire entre différens systèmes de triangles, lorsqu'on veut déterminer, par de grandes opérations, la longueur d'un méridien, ou de tout autre intervalle; il distingue les circonstances où il faut multiplier les triangles, et celles où il en faut diminuer le nombre; il apprécie les avantages auxquels on peut prétendre, et les inconvéniens qu'on doit craindre : non que les localités permettent toujours le meilleur système, mais du moins on se trouve à peu près en état d'estimer les erreurs.

Les précautions à prendre pour déterminer exactement l'amplitude astronomique d'un arc du méridien, forment la matière d'un petit traité où l'on trouve une foule de remarques délicates et nouvelles, qui tendent à perfectionner cette branche très-étendue de l'astronomie pratique, et que l'auteur applique à son sujet. Viennent ensuite les observations qu'il a faites, soit avec Godin et La Condamine, soit avec La Condamine, quand Godin se fut séparé d'eux, soit enfin tout seul. Il compare toutes ces observations avec celles de France et de Laponie, et il en conclut le rapport des axes de la terre.

On croyait avant lui que la terre avait partout, au moins sensiblement, la figure d'un sphéroïde elliptique; il a reconnu que cette figure ne con-

vient pas à tous les méridiens : lorsqu'elle a lieu, les accroissemens des degrés sont comme les carrés des sinus de latitude; mais Bouguer a trouvé que dans plusieurs cas ces accroissemens sont plutôt comme les quatrièmes puissances des sinus de latitude, ce qui indiquerait qu'en regardant toujours la terre comme un solide de révolution, la courbe génératrice s'écarterait de l'ellipse, au moins dans les cas dont il s'agit.

L'ouvrage est terminé par un grand nombre d'expériences que Bouguer a faites sur la longueur du pendule, et sur les effets que produisent dans cette longueur les attractions des grosses montagnes.

Tant d'importantes recherches imprimèrent dans le temps aux opérations du Pérou, un caractère d'évidence et de certitude, qui leur firent donner une préférence marquée sur celles du nord. Les temps postérieurs ont confirmé ce jugement.

Que résulte-t-il enfin des trois mesures faites en France, en Laponie et au Pérou? D'abord une conséquence certaine: savoir, que la terre est aplatie vers les pôles; car le premier degré du méridien, à partir de l'équateur, est de 56750 toises; celui de France, par une latitude de 49 degrés, 23 minutes, est de 57075 toises, suivant la détermination de La Caille et de Cassini de Thury; et celui de Laponie, de 57438 toises; d'où l'on voit

La terre est aplatie vers les pôles.

que la valeur du degré augmente considérablement en allant de l'équateur en France et en Laponie. Mais quelle est la loi précise de cette augmentation ; ou, en d'autres termes, quel est le rapport des axes de la terre, dans la supposition généralement admise, au moins comme à peu près vraie, que la terre a la forme d'un sphéroïde elliptique? C'est sur quoi il y a de la diversité dans les résultats, selon les *données* d'où l'on part pour résoudre le problème.

En supposant que la terre était originairement une masse fluide homogène, soumise aux lois de l'attraction et de la force centrifuge, on trouve que le diamètre de l'équateur et l'axe de rotation devraient être comme les deux nombres 231 et 230 ; les observations du Pérou et de France, comparées ensemble, donnent 304 et 303 ; celles du Pérou et de Laponie, 215 et 214 ; celles de France et de Laponie avaient d'abord donné 178 et 177, mais en y faisant quelques corrections nécessaires, elles donnent 133 et 132. Voyez le livre de La Condamine : *Mesure des trois premiers degrés du méridien*, page 259. Divers rapports entre les axes de la terre.

Il y a, comme on voit, des différences considérables dans tous ces rapports. Quelques astronomes ont pensé, en conséquence, que les méridiens de la terre n'étaient pas des ellipses, ni même des courbes égales et semblables. Il semble que cette malheureuse planète est destinée à tourmenter ses Doutes sur la régularité de la terre.

habitans de toutes les manières. A peine est-elle en possession de la figure elliptique aplatie, après un long procès, qu'on vient lui disputer la régularité de sa constitution. Il est vrai que les observations du Pérou avaient déjà donné l'exclusion à la figure elliptique pour certaines parties des méridiens; mais cette exclusion n'avait qu'un effet limité, et on regardait néanmoins toujours la terre comme un solide produit par la révolution d'une courbe que l'on pouvait prendre pour une ellipse dans la plus grande partie de son cours. Fallait-il donc renoncer au système de la régularité?

An 1752. La Caille, dans son voyage au cap de Bonne-Espérance, ayant mesuré la longueur d'un degré terrestre, par une latitude australe de 33 degrés 18 minutes, trouva qu'elle était de 57037 toises : longueur qui, étant plus grande que celle de l'équateur, et moindre que celle du degré au cercle polaire, indique bien un aplatissement dans la terre; mais elle est moindre qu'on ne devrait le conclure, en la comparant avec celle du degré de France, ce qui semble indiquer un aplatissement irrégulier. Les Jésuites Boscovich et Le Maire ont établi cette irrégularité d'une manière qui serait même plus décisive, si elle était absolument incontestable. Par
An 1775. des mesures faites en Italie, de plusieurs degrés du méridien, à des latitudes égales à celles des degrés mesurés en France, ils ont trouvé des longueurs

très-sensiblement différentes des longueurs de France. Il y a plus : en supposant les méridiens de la terre égaux et semblables, ils n'ont pu concilier leurs propres mesures entr'elles, ni avec les opérations du nord et du Pérou. D'où ils ont conclu qu'il faut abandonner l'hypothèse de la similitude des méridiens. Alors tombent plusieurs théories astronomiques : la terre n'étant plus un solide de révolution, la direction du fil à plomb n'indiquera plus celle de la perpendiculaire à la surface de la terre, ni celle du plan du méridien; l'observation de la distance des étoiles au zénith ne donnera plus la vraie mesure des degrés dans le ciel, ni par conséquent celle des degrés terrestres correspondans, etc. Ces fâcheuses conséquences n'arrêtent point les auteurs de ce nouveau système. Pourquoi, disent-ils, la terre aurait-elle essentiellement une figure régulière? Si elle avait été dans son origine une masse fluide et homogène, l'attraction réciproque de ses parties, combinée avec le mouvement de rotation autour de son axe, lui aurait fait prendre la figure d'un sphéroïde elliptique aplati; ou si elle avait été d'abord composée de fluides de différentes densités, ces fluides, cherchant à se mettre en équilibre, se seraient finalement arrangés dans un ordre régulier, et les méridiens auraient encore été égaux et semblables. Mais pourquoi vouloir que la terre ait été originairement fluide, d'une maniè-

re ou d'autre; et quand elle l'aurait été, pourquoi aurait-elle conservé sa constitution primitive d'équilibre, résultante de cette hypothèse? Dans l'état actuel des choses, une partie de sa surface est solide, et composée de matières de différentes densités, distribuées pêle-mêle, et sans aucun ordre dont on puisse assigner la cause. Les bouleversemens que cette surface a éprouvés, les changemens de terres en mers, l'affaissement du globe en certains endroits, son exhaussement en d'autres: toutes ces révolutions n'ont-elles pas dû altérer considérablement la forme primitive de la terre, quelle qu'on veuille la supposer? N'est-il pas très-vraisemblable qu'elles n'ont pas seulement affecté la surface de la terre, et qu'elles se sont propagées jusque dans l'intérieur du globe? Enfin si les observations l'exigent impérieusement, il faudra bien reconnaître que les méridiens de la terre ne sont ni égaux, ni semblables.

A ces raisonnemens on en oppose d'autres qui les détruisent, sinon d'une manière absolument démonstrative, au moins très-suffisante pour douter encore, et pour donner lieu de soumettre la matière à un nouvel examen. Je commence par les considérations physiques.

Il est d'abord certain que le globe de la terre est à peu près sphérique, ou que du moins on peut le regarder sensiblement comme un sphéroïde el-

liptique très-peu aplati. On cite en preuves, les hauteurs du pôle, qu'on trouve égales à des latitudes égales sous différens méridiens; les règles du pilotage, fondées sur cette supposition, lesquelles sont d'autant plus sûres, qu'elles sont observées avec plus de soin; la rotation constante et uniforme de la terre autour de son axe; la régularité de l'ombre de la terre dans les éclipses de lune, etc. On ajoute que la surface de la terre, dans sa plus grande étendue, est fluide, et par conséquent homogène; que de plus, la matière solide qui forme le reste de cette surface est presque partout peu différente en pesanteur de l'eau commune; et qu'ainsi la figure de la terre doit être à peu près la même qu'elle aurait été dans l'hypothèse d'une matière fluide primitive. Les inégalités que l'on remarque à la surface du globe, les profondeurs des mers, les élévations des plus hautes montagnes, sont très-peu considérables en comparaison du rayon de la terre, la plus grande différence étant moindre que ne serait un dixième de ligne sur un globe de deux pieds de diamètre. Les plus grosses montagnes n'ont que de très-petites masses relativement à toute la masse du globe: en effet, on a remarqué au Pérou, que des montagnes élevées de plus d'une lieue n'écartaient le fil à plomb de sa direction verticale, que d'environ sept secondes. Or, une montagne hémisphérique d'une lieue de hau-

teur, ou de flèche, devrait écarter le pendule d'environ une minute 18 secondes; d'où il suit que les montagnes ont très-peu de matière par rapport au reste du globe: conséquence appuyée sur d'autres observations qui nous ont découvert d'immenses cavités dans ces montagnes. Ces inégalités qui nous paraissent si considérables, et qui le sont en effet si peu, ont été produites par les bouleversemens que la terre a soufferts, et dont on doit conjecturer que l'effet ne s'est pas étendu fort au-delà de la superficie et des premières couches.

Il n'y a donc aucune raison, puisée dans la physique, qui prouve la dissimilitude des méridiens de la terre. Voyons si les observations nous apprendront quelque chose de plus.

L'irrégularité, qui résulte de la mesure de La Caille, n'est pas fort grande, et, sans trop lui faire violence, on peut l'expliquer dans la supposition des méridiens semblables. On attache plus de poids à la mesure d'Italie; mais pour apprécier les conséquences qu'on en veut tirer, il faut observer que la différence géodésique entre le degré mesuré en France, et le degré mesuré en Italie, à pareille latitude, est seulement de 70 toises, c'est-à-dire, d'environ 35 toises pour chacun des deux degrés. Or, cette différence est-elle assez grande pour ne pouvoir pas être attribuée aux erreurs des observations, quelqu'exactes qu'on les suppose? Deux se-

condes d'erreur dans la seule mesure de l'arc céleste, donnent 32 toises d'erreur sur la longueur du degré terrestre; et comment peut-on répondre que les opérations astronomiques et géodésiques n'aient pas donné une telle erreur? Il paraît donc qu'à l'époque où l'on raisonnait d'après les élémens que je viens d'indiquer, rien n'obligeait à regarder les méridiens de la terre comme ne suivant aucune loi constante et régulière.

Nouvelles mesures du méridien.

Toute cette controverse avait néanmoins jeté sur la question des nuages qu'il importait de dissiper. De nouveaux instrumens, une nouvelle perfection ajoutée aux anciens donnaient lieu d'espérer qu'en mesurant un plus grand arc du méridien, qu'on ne l'avait fait encore, on parviendrait à des résultats plus précis. En 1792, l'académie des sciences, alors à son déclin, entreprit une grande opération qui devait avoir l'avantage dont je viens de parler, et de plus celui de fixer, d'une manière très-exacte, une *unité fondamentale* pour toutes les mesures d'étendue : projet très-utile dont on s'occupait depuis long-temps en spéculation. MM. Méchain et Delambre, tous deux membres de l'académie, ensuite de l'institut national qui a suivi les mêmes vues, furent chargés de mesurer l'arc du méridien qui s'étend depuis Dunkerque jusqu'à Barcelonne, ce qui comprend environ neuf degrés; étendue plus grande qu'aucune de celles qu'on avait déter-

minées. M. Delambre eut la partie de Dunkerque à Rhodez, M. Méchain le reste. Ils ont trouvé, comme on devait bien s'y attendre, que les degrés terrestres vont en diminuant de longueur du pôle à l'équateur; ce qui confirme, s'il en était besoin, l'aplatissement de la terre; mais ils ont remarqué de plus, dans un certain nombre de ces degrés, une marche irrégulière, des sauts brusques qui écartent alors la figure elliptique; résultat conforme, quant à l'effet général, à l'observation de Bouguer au Pérou. Cependant on ne se trompera guère, en considérant la totalité d'un méridien comme sensiblement elliptique. Or, dans cette hypothèse, il suit des opérations de MM. Delambre et Méchain, 1.° que les deux axes de la terre sont entr'eux comme les nombres 304 et 303, ou que l'aplatissement de la terre est environ la trois cent-quatrième partie du demi grand axe de l'ellipse; 2.° que la longueur du quart du méridien vaut cinq millions cent trente mille sept cent quarante toises. Ainsi en prenant, comme on a fait, pour *l'unité de mesure linéaire*, qu'on a appelée *mètre*, la dix millionième partie du quart du méridien, le mètre vaut quatre cent quarante-trois lignes et deux cent quatre-vingt seize millièmes parties d'une ligne, du pied de roi ordinaire. La longueur du pendule qui bat les secondes à Paris, vaut trois pieds huit lignes et cinq huitièmes de ligne, ou quatre cent quarante

lignes et cinq huitièmes de ligne. Ainsi la longueur du mètre est, à la longueur du pendule qui bat les secondes, à Paris, à peu près comme 138 est à 137.

Il est certain par là que l'on connaît aujourd'hui plus exactement qu'on ne faisait auparavant les dimensions du globe terrestre; et c'est une obligation que les sciences ont à MM. Delambre et Méchain, qui, pour arriver à leur but, ont eu à vaincre une foule de difficultés, soit physiques, soit morales.

Cependant les géomètres astronomes sont si difficiles à contenter, qu'ils désireraient encore que pour prendre une plus parfaite connaissance des inégalités ou irrégularités auxquelles la surface de la terre peut être sujette dans sa vaste étendue, ou pour s'assurer irrévocablement si tous les méridiens de la terre sont égaux et semblables, on mesurât de plus un très-grand nombre d'arcs terrestres, à des latitudes et à des longitudes très-différentes. Ce vœu est facile à remplir par des calculs fondés sur la longueur du pendule qui bat les secondes en chaque endroit. Il y a dans cette méthode, très-peu dispendieuse, un autre avantage d'un prix inestimable. Les opérations qu'elle prescrit peuvent être faites et répétées dans tous les temps par des astronomes de tous les pays; au lieu que les mesures immédiates des degrés terrestres, indépendamment de plusieurs difficultés ou impossibilités lo-

cales, demandent un appareil et des frais immenses, auxquels les gouvernemens, seuls capables de les faire exécuter, n'ont pas toujours les moyens ou la volonté de consacrer les sommes nécessaires. Ajoutons qu'il est même quelquefois très-dangereux de faire recommencer ces grandes opérations, qu'on n'est pas à portée de vérifier au besoin; car si de deux opérations la seconde s'accorde avec la première, les gens soupçonneux ou malins peuvent dire qu'on a fait cadrer les résultats; et si elles diffèrent, on donne lieu à des discussions de préférence, dans lesquelles il peut être très-difficile de reconnaître la vérité. Enfin tous les pays ne sont pas propres à ces opérations; tous le sont pour les observations du pendule.

II.

Description géographique de la France.

Il était naturel que le gouvernement français, après avoir fait d'abord exécuter l'opération de Picard pour la mesure générale de la France, voulût tenir de la main de ses astronomes, une description particulière de son empire, fondée sur leurs observations. Aussi, lorsque Picard eut mesuré son degré, qui, par un hasard heureux, se trouva placé sur la méridienne de l'observatoire de Paris, D. Cassini ayant proposé de prolonger cet arc de part et d'autre, dans toute l'étendue de la France, le projet fut accepté, et Colbert ordonna des fonds

pour l'éxécution, qui fut commencée environ un an après sa mort. D. Cassini la dirigea; il eut pour coopérateurs les plus célèbres astronomes de l'académie des sciences, La Hire, Sedileau, Deshayes, Chazelles, Jacques Cassini son fils, Philippe Maraldi, son neveu, etc. Les uns cheminèrent vers le nord, les autres vers le midi. Ce travail, commencé en 1684, abandonné, repris par intervalles, ne fut achevé qu'en 1718; et, cette même année, Jacques Cassini en rendit compte dans son livre *de la Grandeur et de la figure de la terre*. On eut ainsi une méridienne, commençant au nord par Dunkerque, passant par l'observatoire de Paris, et aboutissant aux frontières de l'Espagne. Ensuite on rapportait à cette méridienne les autres lieux de la France, par des arcs de l'équateur; ce qui donne la longitude, soit par rapport au méridien de Paris, soit par rapport à tout autre méridien, tel, par exemple, que celui de l'île de Fer, fixé comme le premier, par une ordonnance de Louis XIII, la différence de ces deux méridiens étant supposée connue. La latitude se trouvait par le complément de l'arc compris depuis le zénith jusqu'au pole. Par la combinaison de la longitude et de la latitude, on avait la position de chaque lieu que l'on plaçait sur la carte. On voit que cette manière de fixer la position des lieux sur la carte, est analogue à la méthode que les géomètres em-

An 1684.

ploient pour trouver tous les points d'une courbe, en la rapportant à un système d'abscisses et d'ordonnées correspondantes.

En 1734, on entreprit une autre grande opération, qui tendait à simplifier et à perfectionner la méthode de construire les cartes : ce fut de tracer perpendiculairement à la méridienne de l'observatoire de Paris, une autre courbe qui s'étendît de part et d'autre de cet édifice, vers l'occident et vers l'orient.

Il est d'abord évident que, si le globe terrestre était une sphère parfaite, la perpendiculaire à la méridienne en serait un grand cercle. Mais dans toute autre hypothèse, par exemple lorsque la terre a la forme ellipsoïdale, la perpendiculaire à la méridienne est une courbe à double courbure. En effet, si pour determiner le premier élément de cette perpendiculaire, on plante deux piquets perpendiculaires à la surface de la terre, et situés dans l'alignement perpendiculaire à la méridienne, il faudra déterminer les autres élémens suivant la même loi, c'est-à-dire, planter de proche en proche, dans les alignemens perpendiculaires aux méridiens successifs, des piquets perpendiculaires en chaque endroit à la surface de la terre : alors le premier élément de la courbe demandée étant compris entre les deux premiers piquets, le second élément sera compris entre le second et le troisième pi-

quets; le troisième élément sera compris entre le troisième et le quatrième piquets, ainsi de suite pour toute l'étendue de la courbe. Or, si l'on faisait passer un plan par les deux premiers piquets, l'intersection de ce plan avec la suface de la terre serait une ellipse ordinaire; et des piquets qu'on planterait perpendiculairement à cette ellipse, et dans son plan, rencontreraient obliquement la surface de la terre, excepté seulement aux extrémités des axes de l'ellipse, comme on le voit sans peine avec un peu de géométrie. Ainsi, partout ailleurs qu'aux extrémités des axes de l'ellipse, la courbe perpendiculaire au méridien en chaque endroit s'écarte de la direction elliptique, et forme par conséquent une courbe à double courbure. Clairaut fit cette remarque dans le temps qu'on agitait à l'académie des sciences la question de la perpendiculaire à la méridienne; et il donna sur ce sujet un mémoire fort curieux, où il examine les différentes propriétés de cette courbe. Ac. de Paris, 1733.

Jacques Cassini, accompagné de ses deux fils, de l'abbé La Grive, de Chevalier, etc., exécuta les opérations sur le terrain. On détermina par *points*, ou *stations*, la route que devait suivre la perpendiculaire aux méridiens, depuis Paris jusqu'à Saint-Pol-de-Léon, vers l'occident, et jusqu'à Strasbourg vers l'orient: travail long et hérissé de difficultés locales; car la surface de la terre étant couverte d'i-

négalités, de montagnes, de vallées, de rivières, de marais, on est obligé de changer continuellement de route, ou de former des zigzags, pour arriver aux points où il faut planter les piquets.

En 1735 et 1736, Cassini de Thury, Maraldi, Chevalier, etc., tracèrent deux nouvelles perpendiculaires à la méridienne de Paris, toutes deux dirigées vers l'occident; l'une commençant à Orléans, l'autre au nord de Paris, et à peu près à la même distance de cette ville qu'Orléans.

D'après ces différentes bases, Cassini de Thury, La Caille, Maraldi, etc., formèrent dans toute l'étendue de la France une immense quantité de triangles qui en liaient ensemble tous les points principaux; et en remplissant les petits espaces par des opérations topographiques, on a achevé peu à peu la carte détaillée de la France; elle est divisée en 168 feuilles.

Cassini de Thury avait formé le projet d'une semblable carte pour le reste de l'Europe. Ce projet fut goûté de plusieurs princes étrangers, et il a été exécuté, au moins en partie, dans quelques états de l'Allemagne.

En 1787, le colonel *Roi*, au service de l'Angleterre, excellent astronome, reçut l'ordre de former dans ce pays une chaîne de triangles qui irait se joindre à celle de la méridienne de Paris. Il remplit sa commission avec d'autant plus de succès,

qu'il était muni de parfaits instrumens, construits par le célèbre opticien *Ramsden*. Notre académie des sciences chargea de son côté trois de ses membres, MM. Cassini, fils de Cassini de Thury, Méchain et Le Gendre, de faire des observations correspondantes à celles d'Angleterre. Il en est résulté plusieurs avantages considérables, entr'autres celui de faire connaître, d'une manière très-exacte, la position des observatoires de Londres et de Paris; ce qui facilite et abrège la comparaison des nombreuses observations qui se font dans l'un et l'autre.

SECTION V.

Astronomie des Comètes.

I.

Tous les astronomes savent aujourd'hui que les comètes sont des corps solides, opaques comme les planètes, et que tous ces corps décrivent des ellipses, dont le soleil occupe l'un des foyers. Neuton est le premier qui ait établi cette parfaite identité. Ayant remarqué que les comètes décrivaient des aires proportionnelles aux temps, par rapport au soleil, il conclut qu'elles tournaient autour de cet astre, et qu'elles étaient soumises, comme les planètes, à une force centrale réciproquement pro-

Princ. math. liv. III prob. XL.

portionnelle au carré des distances; ce que toutes les observations modernes ont confirmé. Les comètes sont donc de véritables planètes, avec cette différence seulement qu'elles décrivent des orbites très-allongées, au lieu que les orbites des planètes, si on excepte celle de Mercure, sont presque circulaires. Cette différence sert à distinguer les *comètes* et les *planètes*.

II.

L'opinion des anciens, que les comètes ne sont que des amas de matière, sujets à se dissiper, avait jeté de si profondes racines, la philosophie de Neuton était si peu répandue, même au commencement du siècle passé, que dans ce temps-là des astronomes de réputation tentèrent de renouveler cette vieille erreur. Par exemple, La Hire ne peut se résoudre à placer les comètes au même rang que les planètes. « Si les comètes étaient, dit-il, des » planètes qui se fissent voir seulement de la terre, » lorsqu'elles en sont fort proches, il n'y a pas de » doute qu'elles devraient paraître augmenter peu » à peu, de la même manière qu'on les voit ordi- » nairement s'évanouir et disparaître, tant par rap- » port à leur mouvement, lequel devient plus » lent sur la fin de leur apparition, que par la di- » minution de leur lumière, qui s'éteint aussi peu » à peu dans la même proportion : mais nous com-

Ac. de Paris, 1702, p. 118.

» mençons presque toujours à voir les comètes, » quand elles sont dans leur plus grande clarté, et » quand elles parcourent un plus grand chemin » apparent; et c'est ce qui pourrait faire croire que » ce ne sont que des feux qui s'allument subite- » ment, se dissipent peu à peu en diminuant de » vitesse, etc. » Cette étrange conclusion ne peut être attribuée qu'au peu de soin que les astronomes mettaient encore alors à observer les comètes. Occupés spécialement du mouvement des planètes, ils n'étaient pas assez attentifs à faire la revue de toutes les parties du ciel, et laissaient échapper plusieurs comètes, sans les observer; ils en observaient d'autres long-temps après qu'elles étaient visibles : on prétendait que si les comètes étaient semblables aux planètes, leurs lumières devaient être aussi semblables, ne faisant pas attention qu'il y a même de la diversité à cet égard entre les planètes, à raison des atmosphères dont elles sont environnées; que, par exemple, la lumière de Mars n'est pas la même que celle de Vénus; d'où il suit que les comètes peuvent avoir aussi des atmosphères plus ou moins étendues, plus ou moins denses, qui font varier de plusieurs manières leurs figures et leurs apparitions. Toutes ces causes d'illusions ont été enfin dissipées successivement par une plus grande assiduité à visiter l'étendue des espaces célestes, et par les recherches particulières qu'on a

faites, avec le secours des plus excellens instrumens, du cours des comètes, et de toutes les circonstances qui l'accompagnent.

Je ne puis qu'indiquer ici les objets et les progrès de la cométographie. Ceux qui voudront approfondir cette partie intéressante de l'astronomie, trouveront amplement de quoi se satisfaire dans l'excellent ouvrage que Pingré, l'un de nos plus grands astronomes, publia sur ce sujet, en 1783. Il n'a rien oublié: histoire, physique, observations, probabilités, conjectures, tout est rapporté et analysé avec l'exactitude la plus scrupuleuse.

PINGRÉ, né en 1711, mort en 1796.

III.

Dénombrement des comètes.

Il est impossible de déterminer le nombre des comètes qui ont paru, depuis que l'on a commencé à les remarquer. Pingré estime qu'à compter de la naissance de Jésus-Christ jusqu'à l'année 1783, il a paru très-probablement environ 380 comètes. Il en est plusieurs autres qu'on ne peut citer que par conjecture. Si l'on joint à ces comètes connues, ou soupçonnées, toutes celles qu'on a laissé passer sans les apercevoir, par une foule de causes, telles que leur petitesse apparente, leur proximité du soleil, leur invisibilité sur l'horizon de l'Europe, l'éclat de la lune, le mauvais temps, etc. : on reconnaîtra que le nombre des comètes doit être immense. Sur quoi, néanmoins,

il faut remarquer que parmi les comètes qui ont été vues, il peut s'en être trouvé plusieurs qui fussent revenues périodiquement.

Prédictions du retour des comètes.

Si les anciens nous avaient laissé quelques observations un peu exactes sur les comètes, on connaîtrait au moins la révolution de quelques-unes, et on pourrait prédire leur retour. Mais la cométographie est encore à cet égard presqu'au berceau. De toutes les comètes, il n'y en a qu'une seule dont on connaisse, du moins à très-peu près, la révolution périodique : c'est la comète qui a été observée aux années 1532, 1607, 1682 et 1759. Halley est l'auteur de cette découverte : aussi la comète dont il s'agit porte-t-elle son nom. Ayant calculé avec un extrême soin, par les méthodes géométriques de Neuton, et d'après les meilleures observations, une table du mouvement d'un grand nombre de comètes, il reconnut que l'une d'elles, observée aux années 1532, 1607, et qu'il observa lui-même en 1682, s'était montrée avec des circonstances si semblables dans les trois cas, soit pour la forme, ou pour la grandeur, ou pour la position de l'orbite, qu'il crut pouvoir affirmer que c'était le même astre. A la vérité, il y avait des différences assez considérables dans les temps des révolutions; mais cette difficulté ne l'arrêta point. Déjà instruit par la théorie de la gravitation réciproque des planètes, que ces corps troublent les mouvemens les

Voyez son petit traité de cométographie, 1705.

uns des autres; que, par exemple, le mouvement de Saturne est altéré très-sensiblement par l'action de Jupiter; Halley pensa que le mouvement de la comète pouvait de-même avoir été altéré par l'attraction des planètes dont elle s'était approchée, et en particulier par l'attraction de Jupiter. D'après des calculs qu'il ne donnait cependant que pour des à peu près, susceptibles d'une latitude de quelques mois, il annonça que la comète reparaîtrait vers la fin de 1758, ou le commencement de 1759 : prédiction que l'événement a vérifiée. Cette comète décrit donc, comme les planètes, une ellipse autour du soleil. En prenant pour unité la distance de la terre au soleil, le grand axe de l'ellipse de la comète est représenté, à peu près, par 36, l'excentricité par 17, la distance aphélie de la comète au soleil par 35, la distance périhélie par un peu plus de $\frac{1}{2}$; l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique est de 17 degrés 39 minutes; le temps de la révolution périodique est d'environ 75 ans et demi.

Halley attachait un tel prix à cette découverte, à laquelle même il croyait que l'honneur de sa nation était intéressé, que dans ses *Tables astronomiques*, imprimées en 1717, et publiées seulement en 1749, il s'exprime ainsi : *Si secundum prædicta nostra redierit iterum cometa circa annum 1758, hoc primum ab homine* A*NGLO* *in-*

ventum fuisse non inficiabitur æqua posteritas.

Le même astronome avait soupçonné que la comète de 1661 avait déjà paru en 1532; que sa période était de 128 à 129 ans; et qu'elle pourrait reparaître vers l'année 1789 ou 1790. Mais cette annonce, qui n'était fondée que sur de légères probabilités, ne s'est pas vérifiée. Il a pensé encore que la grande comète de 1680 était la même qui avait paru à la mort de Jules César : il a fixé (mais avec modestie et circonspection) la durée de sa révolution à 575 ans environ : la postérité décidera s'il a rencontré juste.

Pingré conjecture que la comète de 1556 pourrait bien être la même que celle de 1264; qu'elle fait sa révolution en 292 ans environ, et qu'on la reverra en 1848. Il y a encore quelques autres comètes dont on a hasardé d'annoncer le retour; mais toutes ces prédictions sont très-vagues et très-incertaines. Les astronomes qui observent les comètes avec attention, préparent les matériaux d'un édifice qui ne pourra être élevé que par la postérité.

IV.

On croit qu'il tombe de temps en temps des comètes dans le soleil, et même on fait servir ce moyen à réparer la perte de substance que fait le

Comètes tombant sur le soleil.

soleil par la quantité prodigieuse de rayons lumineux qu'il envoie de tous côtés dans les espaces célestes. Il n'y a en cela rien d'impossible. Une comète étant continuellement dérangée dans son mouvement elliptique autour du soleil, par les attractions qui proviennent de tous les autres corps célestes, il peut arriver que dans une longue suite de siècles, toutes ces forces se combinent ensemble, de telle manière que leur résultante précipite la comète dans le soleil, ou lui fasse sillonner sa surface. Cette combinaison juste doit être fort rare; mais enfin elle est dans l'ordre des possibilités; et sans doute dans le nombre immense des comètes, il s'en est rencontré qui ont éprouvé ce sort. Suivant quelques calculs, la comète de 1680 passa si près du soleil, qu'au moment de son périhélie, elle n'était distante de la surface de cet astre, que d'une quantité égale au tiers du demi-diamètre solaire. Peut-être finira-t-elle par tomber dans le soleil; mais cet événement (s'il arrive) est très-éloigné, et nous ne devons en prendre aucune alarme. En général, une comète tombant dans le soleil ne peut le déranger de sa place, au point de faire craindre la destruction de notre monde planétaire. Duséjour a donné sur ce sujet un ouvrage fort intéressant qu'on peut consulter.

V.

L'opinion commune, fort vraisemblable, que la Lune, Vénus, Mars, etc., qui sont des corps solides et opaques, comme la terre, ont des habitans comme elle, a fait penser qu'il en pourrait bien être de même des comètes; mais cette conséquence ne paraît pas admissible en général; car la plupart des comètes décrivent des orbites si prodigieusement excentriques, qu'elles doivent éprouver des vicissitudes de chaud, de froid, de clarté, de ténèbres, auxquelles ne pourraient résister des animaux, à moins qu'ils ne fussent d'une nature dont les animaux terrestres ne nous fournissent aucune idée. Par exemple, Neuton a trouvé que la comète de 1680 a dû éprouver, à son passage au périhélie, une chaleur deux mille fois plus grande que celle d'un fer rouge; et d'un autre côté, si l'on suppose que la durée de la révolution de cette comète soit de 575 ans, le calcul astronomique fait voir que le diamètre du soleil serait vu de la comète sous un angle de 73 degrés au périhélie, et sous un angle de 14 secondes seulement à l'aphélie; d'où résulte une excessive différence entre le chaud et le froid, de même qu'entre les degrés de clarté.

Les comètes sont-elles habitées?

VI.

Parmi les astronomes de notre temps, qui se sont

adonnés à l'observation des comètes, on doit citer, avec une distinction particulière, M. Messier, ci-devant membre de l'académie des sciences, aujourd'hui membre de l'institut. Il a observé à Paris, et presque toujours le premier, toutes les comètes qui ont paru depuis l'année 1757, jusqu'à la seconde comète de 1805. Ce fut lui qui découvrit à Paris, le 21 janvier 1759, avec un télescope neutonien, la comète de Halley, que l'on attendait avec impatience. Il fut aussi un des premiers qui observa la comète de 1770. Cette comète offre une singularité digne d'attention. Plusieurs savans géomètres, à qui M. Messier avait communiqué les observations qu'il avait commencé d'en faire, dès le 14 juin 1770, calculèrent l'orbite elliptique; et s'accordèrent, quoique par divers moyens, à trouver que la révolution périodique de la comète devait être d'environ cinq ans, auquel cas cet astre aurait été une véritable planète; mais il n'a pas reparu, et on ne l'avait pas vu avant 1770.

SECTION VI.

Passages de Mercure et de Vénus devant le Soleil. Digression concernant l'astronomie des Brames.

I.

Les passages de Mercure et de Vénus devant le disque du soleil, n'étaient d'abord qu'un simple objet de curiosité : ils sont devenus importans dans l'astronomie, depuis qu'on a su en tirer parti pour déterminer, avec une grande exactitude, la parallaxe du soleil.

Mercure et Vénus ayant leurs orbites placées en dedans de l'écliptique, sous de petites inclinaisons, il est évident que ces deux planètes doivent se trouver de temps en temps entre le soleil et la terre, et former alors pour nous des espèces d'éclipses de soleil. Lorsque cela arrive, on voit sur le disque solaire une petite tache ronde et noire, qui en occupe environ la trentième partie pour Vénus, et la cent cinquantième partie pour Mercure. On n'a commencé à remarquer ces apparitions d'une manière certaine, que depuis l'invention des lunettes.

II.

Les passages de Mercure sur le soleil sont assez fréquens ; ceux de Vénus sont très-rares. On y vit Mercure pour la première fois, en 1631 ; Vénus aussi pour la première fois, en 1639. Depuis ce temps, on y a revu Mercure un très-grand nombre de fois ; on n'y a revu Vénus qu'en 1761 et 1769 ; elle y passera, suivant les calculs de Halley, aux années 1874, 2004, 2117.

Ce grand astronome étant à l'île Sainte-Hélène, en 1677, y observa un passage de Mercure sur le soleil, avec un très-grand instrument ; et dès-lors il conçut la belle pensée, qu'on pourrait faire servir ces sortes de passages, bien déterminés, à calculer très-exactement la parallaxe du soleil. Il exposa brièvement cette idée dans les *Transactions philosophiques,* pour l'année 1691 ; il l'a développée depuis dans le même recueil pour l'année 1716, et dans les *Actes de Leipsick*, pour l'année 1717.

Cette méthode consiste en général à chercher la différence entre la parallaxe horizontale de la planète *éclipsante,* et la parallaxe horizontale du soleil, par le temps que la planète emploie à traverser le disque solaire ; d'où l'on voit que connaissant la parallaxe de la planète, on connaîtra aussi celle du soleil. Par malheur, Mercure, qu'on

voit si souvent sur le soleil, n'est pas propre à cette recherche, parce qu'il est si éloigné de la terre, et sa parallaxe est si petite, que la différence cherchée entre les deux parallaxes, est moindre que celle du soleil; ce qui exposerait à commettre dans le calcul des erreurs plus grandes que la parallaxe même du soleil. Il n'en est pas ainsi de Vénus, dont la parallaxe horizontale est trois ou quatre fois plus grande que celle du soleil. Supposons donc qu'un observateur, placé dans un lieu A, détermine très-exactement le moment où le bord de Vénus touche celui du soleil, soit en entrant, soit en sortant : un second observateur, placé dans un autre lieu B, verra le même contact, un peu plutôt ou un peu plus tard, parce que le soleil étant placé alors, relativement à la terre, par de-là Vénus, de telle manière que les distances de la terre à Vénus et au soleil sont à peu près entr'elles comme les nombres 6 et 7; le rayon solaire, émané du point de contact, mettra des temps différens pour arriver aux lieux A et B. Par exemple, supposons que les deux lieux soient *antipodes* l'un à l'autre; et admettons pour un moment que la parallaxe horizontale du soleil soit de 10 secondes; on trouvera, par la théorie des mouvemens de la terre et de Vénus, que l'intervalle des temps devrait être de 17 minutes; donc, si les observations directes donnent un autre nombre, par exemple 13

Hist. de l'ac. 1757, pag. 98.

minutes, il faudra diminuer la parallaxe horizontale du soleil d'environ 2 secondes, ou la réduire à 8 secondes, en supposant, ce qui est sensiblement vrai, que les intervalles de temps sont comme les parallaxes.

Halley ne pouvant pas espérer de voir le passage de Vénus sur le soleil, de 1761, exhorte *, dans les termes les plus pathétiques, les astronomes qui devaient vivre à cette époque, à employer toutes leurs forces, tous leurs moyens, pour faire une observation d'où dépend la connaissance plus parfaite des orbites planétaires, et d'où ils recueilleraient une gloire immortelle.

III.

Le vœu de Halley a été parfaitement accompli. Non-seulement on observa dans les principales vil-

---

* Cette exhortation est si curieuse, que je ne puis m'empêcher de la rapporter ici dans ses propres termes : *Curiosis syderum scrutatoribus quibus, nobis vitâ functis, hæc observanda reservantur, iterum iterumque commendamus ut, moniti hujus nostri memores, observationi peragendæ strenuè totisque viribus incumbant; iis que fausta omnia exoptamus et vovemus, præprimis ne nubili cœli importunâ obscuritate exoptatissimo spectaculo priventur; utque tandem orbium cœlestium magnitudines intra arctiores limites coercitæ in eorum gloriam famamque sempiternam cedant.* Act. Lips. Oct. 1717.

les de l'Europe, où il y a des observatoires, le passage de Vénus sur le soleil, en 1761, et celui qui eut lieu encore en 1769, et dont Halley n'avait pas parlé; mais les souverains de l'Europe envoyèrent à l'envi, dans les pays étrangers, des astronomes pour faire des observations correspondantes. Le passage de 1761 fut observé à Paris par MM. Cassini de Thury, Le Monnier; à Londres, par M. Maskeline; à Stockolm, par M. Vargentin; à Tobosk, par M. l'abbé Chappe; dans l'île de Rodriguez, par M. Pingré, etc. Celui de 1769 fut observé à Paris et à Londres, par les principaux astronomes de ces deux villes; à l'île Saint-Dominique, par M. Pingré; en Californie, par M. l'abbé Chappe, qui fut le martyr de son zèle pour l'astronomie; dans plusieurs villes de l'Asie et de l'Amérique, aux frais de l'impératrice de Russie et du roi d'Angleterre, etc. Je supprime une multitude de détails qui m'écarteraient trop de mon sujet.

Il résulte de toutes ces observations, que la parallaxe horizontale du soleil est un peu au-dessous de 9 secondes, c'est-à-dire moindre d'environ un dixième que La Caille ne l'avait conclue des observations de Mars et de Vénus. Si on la suppose de 9 secondes, on trouvera que la distance du soleil à la terre est de 22919 demi-diamètres du globe terrestre.

Les méthodes que les astronomes emploient

pour faire ces sortes de calculs, sont indirectes, ou fondées sur de *fausses positions,* par lesquelles néanmoins ils arrivent graduellement à la vérité. Duséjour, dans son *Traité des mouvemens célestes,* que j'ai déjà cité, donne des méthodes analytiques et directes, pour tous ces problèmes. M. Delambre a donné aussi une méthode directe pour calculer les passages de Mercure et de Vénus sur le soleil. Si l'usage de ces méthodes pouvait s'introduire dans toutes les parties de l'astronomie pratique, elle en deviendrait plus uniforme et même plus facile.

Mémoires de l'Inst. t. III.

IV.

LEGENTIL, né en 1725, mort en 1792.

Legentil, membre de notre académie des sciences, fut envoyé dans les Indes, pour y observer le passage de Vénus sur le soleil, en 1761. Il ne put faire cette observation, ni même celle de 1769, par différentes causes qu'il est inutile de rapporter. Je vais du moins profiter de cette occasion pour indiquer les autres fruits que le voyage de cet astronome nous a procurés : ce sont diverses observations très-curieuses d'astronomie, de physique, d'histoire naturelle : ce qui forme la matière de deux gros volumes *in*-4.°, publiés en 1785 et 1786. Je me borne ici au précis qu'il donne de l'astronomie des Brames, en l'abrégeant même encore, autant que mon plan l'exige, sans préjudice des choses essentielles.

On sait que la presqu'île en-deçà du Gange forme une pointe avancée dans la mer du Sud : la partie occidentale s'appelle la côte de *Malabar,* et la partie orientale, où se trouve Pondichéri, la côte de *Coromandel :* dénominations imposées par les Portugais, qui, les premiers des Européens, ont pénétré dans ces pays. Nous confondons souvent ensemble ces deux peuples, qui n'ont pas cependant la même religion ni le même langage. — Astronomie des Brames.

Tous les pays qui composent ou avoisinent la côte de *Carnate,* sont occupés aujourd'hui par les *Talmouts*, peuples originaires du *Tanjaour* et du *Maduré,* qui ont réduit les anciens habitans en un esclavage d'autant plus dur, qu'il est perpétuel, le passage d'une caste à l'autre étant sévèrement interdit par les lois.

Les Brames, espèce de prêtres assez semblables à ceux de l'ancienne Egypte, forment, parmi les Talmouts, une caste particulière et privilégiée, chargée du dépôt de la religion et des sciences. Cette prérogative leur donne nécessairement beaucoup de considération et de pouvoir. Ils se disent les descendans et les héritiers de ces anciens *gymnosophistes,* ou philosophes indiens, dont il est tant parlé dans l'histoire. Cette prétention peut être fondée : on doit toujours croire que des hommes en possession des honneurs et des avantages attachés à la supériorité des lumières, cherchent à

transmettre d'âge en âge leurs connaissances à des successeurs avides de recueillir un si précieux avantage. Il y a cependant ici une différence essentielle à remarquer : les anciens Brames ont été de grands observateurs, puisqu'ils s'étaient fait des méthodes pour calculer les éclipses et plusieurs autres phénomènes célestes; au lieu que ceux d'aujourd'hui n'observent point, et que toute leur astronomie n'est qu'une science de tradition, bornée même presqu'entièrement à la connaissance des mouvemens du soleil et de la lune, qu'ils calculent par les méthodes anciennes.

L'opinion des Talmouts est que l'établissement des Brames dans l'Inde ne remonte pas fort haut; mais Legentil observe qu'un intervalle de mille ans n'est pour ces peuples qu'un temps assez court. Rien ne fixe cette époque. Leurs historiens conviennent seulement qu'il y eut une réforme considérable dans leur astronomie, sous un de leurs rois, qu'ils appellent *Salivagena*, ou *Salivaganam*, et dont Legentil place la mort vers l'an 78 de l'ère chrétienne, d'après quelques calculs faits sur les données des Brames. Ce prince aimait beaucoup l'astronomie, qui prit sous son règne une telle faveur, que le temps de *Salivaganam* est aussi célèbre dans l'Inde, que l'ère de Nabonassar l'est chez les Chaldéens.

Les Brames sont très-vains, très-peu communi-

catifs, et très-persuadés que les Européens n'approchent pas de leur savoir. Pendant un séjour de deux années, de 1768 à 1770, que Legentil fit à Pondichéri, il eut beaucoup de peine à pénétrer dans leurs mystères, qu'on lui cacha même d'abord avec une réserve insultante. Cependant, à force d'argent et de caresses, il parvint à apprivoiser un savant Brame qui voulut bien l'initier à ces profondes connaissances. Toute l'astronomie des Brames comprend cinq articles principaux, savoir : 1.° la théorie du *gnomon,* dont les Brames se servent pour trouver la méridienne, orienter leurs pagodes, et trouver la différence d'un jour quelconque au jour de l'équinoxe; sur quoi il faut remarquer que cette différence, ainsi déterminée par les hauteurs correspondantes du soleil, a besoin d'être corrigée, à cause du changement de déclinaison du soleil dans l'intervalle des observations; mais ils ne connaissaient pas cette correction, qui, heureusement, se trouve fort légère pour les latitudes de ces pays. 2.° La durée de l'année, qu'ils font plus courte qu'elle n'est, seulement de deux minutes, en cela plus exacts que les astronomes grecs. 3.° Le *zodiaque,* qu'ils divisent comme nous en douze parties, pour les douze mois solaires, et de plus en vingt-sept parties pour les mois périodiques lunaires. 4.° La *précession des équinoxes,* qu'ils font de 54 secondes de degré par an. 5.° Enfin, les

éclipses, qu'ils calculent par des méthodes particulières, fort expéditives, n'employant ni plumes, ni crayons, moyens auxquels ils substituent des *cauris*, espèces de coquilles qu'ils rangent sur une table, ou quelquefois par terre.

La conclusion de ce précis est que l'astronomie orientale, dans son état actuel, ne peut pas entrer en comparaison avec celle des Européens. S'il était possible de prendre aussi une connaissance exacte de l'ancienne astronomie dans les mêmes pays, on trouverait infailliblement qu'il y a beaucoup à rabattre de l'idée avantageuse que plusieurs historiens ont cherché à nous en donner.

SECTION VII.

Nouvelles découvertes dans le ciel. Indication de quelques ouvrages d'astronomie.

I.

Il s'est fait depuis environ trente ans plusieurs nouvelles découvertes dans notre monde planétaire. Je vais indiquer les principales.

Planète d'Herschel.

En 1781, M. Herschel, membre de la société royale de Londres, observant à Bath, avec un excellent télescope qu'il avait construit aux frais de

Georges III, roi d'Angleterre, les étoiles des pieds des gémeaux, distingua un astre qui changeait de place, et qu'il prit pour une comète. Après s'être bien assuré du fait, il communiqua ses observations à M. Lexel, fameux géomètre de l'académie de Pétersbourg, qui se trouvait alors à Londres. M. Lexel reconnut qu'on pouvait satisfaire aux observations, par le moyen d'une orbite circulaire d'un rayon environ dix-huit fois plus grand que celui de l'orbite terrestre; ce qui range d'abord l'astre dont il s'agit au nombre des planètes, et donne environ quatre-vingt-deux ans pour la durée de sa révolution. De nouvelles observations, et de nouveaux calculs, ont fait connaître que cette planète est deux fois plus loin du soleil que ne l'est Saturne; que la durée de sa révolution est de quatre-vingt-trois ans et neuf mois; que son orbite est inclinée de 46 minutes 20 secondes au plan de l'écliptique; et qu'enfin elle est environ 80 fois plus grosse que la terre. Elle devrait naturellement s'appeler *Herschel*; mais l'usage semble prévaloir de l'appeler *Uranus*, parce qu'elle est placée au-dessus de Saturne, comme Saturne est placé au-dessus de Jupiter : ce qui entre dans l'esprit de la fable, qui fait Uranus père de Saturne, et Saturne père de Jupiter.

M. Herschel, ayant perfectionné successivement son télescope, a découvert avec cet instru-

ment, deux satellites à sa planète, en 1787; et quatre autres en 1797; de sorte qu'elle a maintenant six satellites bien connus.

En 1789, le même astronome découvrit deux nouveaux satellites à Saturne, plus voisins de cette planète qu'aucun des cinq anciens : l'un fait sa révolution en 23 heures, l'autre en 33 heures.

On sait que l'anneau de Saturne, observé avec les lunettes ordinaires, disparaît de temps en temps, à cause de son peu d'épaisseur. En 1790, M. Herschel le vit sans interruption, par le moyen de son grand télescope; il observa dans cet anneau un point lumineux et fixe, qui lui fit connaître que l'anneau tourne autour d'un axe perpendiculaire à son plan, dans l'espace de 10 heures 32 minutes.

II.

Quatre nouvelles planètes.

Quatre nouvelles planètes principales, découvertes dans ces derniers temps, prouvent l'assiduité des astronomes à observer le ciel, et l'excellence de leurs instrumens. La première fut aperçue à Palerme, le 1.er janvier 1801, par M. *Piazzi,* astronome du roi de Sicile; elle est placée entre Mars et Jupiter, et on lui a donné le nom de *Cérès;* elle fait sa révolution en 4 ans 7 mois 10 jours; l'inclinaison de son orbite sur le plan de l'écliptique, est de 10 degrés 38 minutes. La seconde fut découverte le 28 mars 1801, par M. *Olbers,* docteur en

médecine à *Bremen;* on l'appelle *Pallas;* sa période et sa distance au soleil sont à peu près les mêmes que pour Cérès; mais l'inclinaison de son orbite sur le plan de l'écliptique est de 35 degrés 48 minutes, quantité très-grande comparativement aux inclinaisons des autres orbites planétaires. La troisième, appelée *Junon,* a été découverte par M. *Harding,* le 4 septembre 1804, à *Lilienthal,* près Bremen; sa révolution est de 4 ans et 5 mois; son inclinaison est de 13 degrés. Enfin, la quatrième, appelée *Vesta,* a été vue pour la première fois par M. Olbers, le 19 mars 1807; elle paraissait alors comme une étoile de la cinquième ou sixième grandeur; elle avait une lumière pure et blanche: au lieu que Cérès, Pallas et Junon, paraissent enveloppées d'une atmosphère épaisse; elle est un peu plus voisine du soleil que les trois dont je viens de parler, et fait par conséquent sa révolution en moins de temps qu'elles.

La petitesse de ces quatre nouvelles planètes, et le peu de différence qui se trouve entre leurs distances au soleil, ont fait conjecturer au docteur Olbers, qu'elles sont des fragmens d'une grosse planète, qui circulait autrefois, à la même distance, entre Mars et Jupiter, et qui a été brisée d'une manière quelconque, comme, par exemple, par le choc de quelque comète; mais ce système souffre une difficulté considérable, tirée de la grande

diversité qui existe entre les inclinaisons des orbites de ces planètes sur le plan de l'écliptique.

III.

Indication de quelques livres d'astronomie.

On a beaucoup écrit sur l'astronomie dans cette quatrième période; je n'entreprendrai pas de faire le recensement de tous ces ouvrages. La plupart ne me sont connus que par les titres, ou par les jugemens que j'en ai entendu porter. Je me bornerai donc ici à quelques-uns de ceux que j'ai lus, ou dont j'ai pris au moins une idée générale. Il ne s'agira même que d'ouvrages écrits en français.

Nous n'avions point de traité méthodique et complet d'astronomie, avant l'année 1740, époque à laquelle Jacques Cassini en fit paraître un, qui contient toutes les connaissances d'astronomie pratique que l'on avait alors, et auxquelles il a lui-même beaucoup contribué par ses nombreuses observations. Il commence par exposer les systèmes ou les hypothèses que les astronomes emploient pour rendre raison des mouvemens apparens des corps célestes; la théorie générale des réfractions et des parallaxes; la division des étoiles en constellations; les lois des mouvemens que ces astres paraissent avoir en longitude et en latitude. De ces notions préliminaires, l'auteur passe à l'explication du mouvement des planètes, objet principal de l'astronomie, que Jacques Cassini traite

dans toute son étendue, tant pour les planètes principales que pour les satellites. Cet ouvrage est accompagné de *tables* du soleil, de la lune, des planètes, des étoiles fixes, et des satellites de Jupiter et de Saturne. On sent que toutes ces tables ne peuvent pas avoir l'exactitude que comportent aujourd'hui les nouvelles observations, et la théorie physique des mouvemens célestes. Aussi les astronomes postérieurs en ont-ils construit d'autres beaucoup plus parfaites. Mais on doit toujours conserver de la reconnaissance pour ceux qui font les premiers pas.

Les *Institutions astronomiques*, que Le Monnier publia en 1746, l'emportèrent sur les Élémens d'astronomie de Jacques Cassini, par la clarté et par de nouvelles recherches; ce qui en a fait pendant très-long-temps l'un des principaux livres où les commençans étudiaient les élémens de l'astronomie. Le fonds de cet ouvrage est de Keil, qui l'avait composé en latin pour l'instruction de ses élèves au collége d'Oxford, où il était professeur. Les additions que Le Monnier y a faites, sont très-considérables; et le traité, dans l'état où il est aujourd'hui, peut être regardé comme appartenant à peu près également aux deux auteurs.

La même année 1746, La Caille fit imprimer ses *Leçons élémentaires d'astronomie physique et géométrique*, qu'il expliquait depuis quel-

que temps au collége Mazarin. Elles sont écrites avec beaucoup de concision, mais avec clarté; elles sont très-propres à faire connaître, sinon tous les détails, au moins tous les principes de l'astronomie moderne. Aussi ont-elles eu, et ont-elles encore aujourd'hui le plus grand succès, comme livre classique.

Lalande donna, en 1764, la première édition de son *Astronomie*, où il s'est proposé d'expliquer au long toutes les parties de l'astronomie, tant celles qui dépendent des observations, que les théories physiques des mouvemens célestes. Cet ouvrage utile le serait davantage, s'il était moins prolixe, si l'auteur s'était attaché à y mettre de la méthode, à employer des démonstrations simples, à rapprocher plusieurs objets semblables, à supprimer nombre de choses qui n'appartiennent qu'indirectement à l'astronomie, et qui détournent l'attention du lecteur, etc.

Le traité élémentaire d'astronomie que M. Biot, membre de l'institut, a publié, en 1805, est très-propre à guider et à conduire très-loin les commençans dans l'étude de cette science. Il est écrit avec clarté et profondeur.

SECONDE PARTIE.

Astronomie physique.

SECTION PREMIÈRE.

Physique des anciens. Descartes. Neuton. Loi de l'attraction.

I.

LES anciens ont rarement interrogé l'expérience dans les matières de physique, où elle est néanmoins d'une nécessité indispensable : car les ressorts par lesquels la nature agit, nous étant presque toujours inconnus, il ne nous reste que la ressource d'en étudier et d'en rapprocher les effets. Dominés par l'esprit de système, dans le plus mauvais sens, et plus empressés d'étaler leurs conjectures et leurs opinions, qu'animés de la solide gloire de s'instruire d'abord eux-mêmes par l'observation suivie et raisonnée des phénomènes, ils introduisirent dans leurs explications physiques de ces phénomènes, les formes substantielles, les causes *per se,* les causes *par accident,* et autres qualités *occultes :* grands mots vides de sens, in- Physique des anciens.

ventés pour donner carrière à tous les écarts de l'imagination.

II.

Physique de Descartes.

Descartes sentit qu'une telle manière de philosopher n'était qu'une source perpétuelle de faux raisonnemens et de fausses conséquences. Il voulut tout expliquer par la matière et le mouvement, sans admettre dans les corps d'autres propriétés que celles dont ils sont essentiellement doués. Dans cette vue, il posa pour principe que tous les corps sont composés des mêmes élémens; que leur constitution, intérieure ou extérieure, dépend uniquement de quelques formes simples dans leurs parties intégrantes, et que ces formes primordiales, une fois reconnues, il ne s'agissait plus que d'étendre et de suivre leurs combinaisons dans les divers accidens de repos et de mouvement, auxquels les corps sont sujets. Ce début était raisonnable, et annonçait des vues qui, dirigées par l'expérience, auraient pu conduire à des vérités très-utiles. Mais bientôt embarrassé par le nombre et la variété des phénomènes à expliquer, ébloui par quelques expériences imparfaites, et croyant pouvoir en deviner d'autres par la seule force de son génie, Descartes admit dans les parties constituantes de la matière, des configurations et des grandeurs arbitraires, des mouvemens et des situations

dont il n'existait d'autre cause que le besoin du système; il feignit des fluides invisibles, d'une extrême ténuité, agités de mouvemens secrets, pénétrant les pores des corps sans éprouver aucune résistance, et toujours obéissans, si je puis m'exprimer ainsi, aux différens ordres qu'il leur intimait suivant les circonstances. Enfin, de suppositions en suppositions, il en vint à imaginer ces fameux tourbillons, ou ces vastes courans de matière éthérée auxquels il faisait emporter les planètes, comme une rivière emporte un bateau. Ses disciples ne furent pas plus modérés, ni plus heureux que lui: forcés d'abandonner son système en plusieurs points essentiels, ils y substituaient, à chaque occasion, de nouvelles hypothèses, tout aussi précaires, tout aussi fragiles que celles de leur maître. Malgré tant d'efforts et de soutiens, tout ce vaste édifice s'est écroulé presqu'entièrement. Les tourbillons n'ont pu résister aux coups que leur ont porté l'astronomie et la mécanique.

III.

Neuton écartant sagement les prestiges de l'imagination, étudia la nature dans la nature même, dont il parvint enfin à deviner le secret, à force de méditations et de recherches fondées sur la géométrie et les observations. Plusieurs philosophes, avant lui, avaient pensé que tous les corps de l'uni- Philosophie de Neuton.

vers ont une tendance les uns vers les autres. Nous avons remarqué qu'on trouve distinctement cette opinion dans une lettre de Pascal et de Roberval à Fermat; j'ai aussi rapporté un passage de Hook, qui contient la même idée plus développée et appliquée immédiatement au mouvement des planètes. Mais dans cet état de généralité, l'opinion dont il s'agit n'était qu'une simple conjecture: elle ne pouvait prendre le caractère de la certitude, qu'autant que l'attraction observerait une loi constante et régulière dans tous les effets qu'on lui attribuait. Or, Neuton découvrit qu'il existait une telle loi: alors, il ne fut plus permis de douter de la gravitation universelle et réciproque des corps; et, en appliquant la géométrie à ce principe, on est arrivé de proche en proche à expliquer d'une manière certaine, et sans le secours d'aucun système, les mouvemens des corps célestes, et les autres phénomènes qui en dépendent. Nous n'avons donc plus ici, et dans la suite, qu'à exposer la marche de Neuton et de ses successeurs, dans cette vaste carrière.

IV.

Galilée avait établi, 1.° que tous les corps terrestres tombent perpendiculairement à la surface de la terre; 2.° que leur mouvement est uniformément accéléré, ou que la pesanteur demeure tou-

jours constante, de quelque hauteur qu'on les laisse tomber. La première proposition est incontestable, et tout le monde peut la vérifier par l'expérience. Neuton conçut des doutes sur la seconde : il observa que les différences entre les hauteurs d'où nous pouvons laisser tomber les corps, sont trop peu considérables pour manifester des variations dans la pesanteur, supposé qu'il y en ait effectivement. Il alla donc chercher le dénouement de cette difficulté dans la lune, en raisonnant à peu près de la manière suivante :

Nous voyons qu'un boulet de canon, lancé par l'explosion de la poudre, va tomber d'autant plus loin, que cette explosion est plus forte. De plus, la théorie de Huguens, *sur la force centrale dans le cercle*, nous apprend que si le boulet, animé d'une pesanteur toujours constante et toujours dirigée vers le centre de la terre, était lancé horizontalement avec une vitesse égale à celle qu'il acquerrait s'il tombait librement en ligne droite d'une hauteur égale au demi-rayon du globe terrestre, il tournerait sans fin circulairement autour de la terre (abstraction faite de toute résistance), passant à chaque révolution par le point d'où il serait parti. Le même raisonnement a lieu également, proportion gardée, si le boulet, au lieu de partir d'un point placé sur la surface de la terre, partait d'un point élevé au-dessus de cette surface, d'une lieue,

de deux lieues, etc. On peut donc le transporter jusqu'à la lune, ou supposer qu'il est la lune même, laquelle tourne en effet circulairement autour de la terre : et alors, par la vitesse avec laquelle la lune tourne, nous trouverons le rapport de la force qui la retient dans son orbite, ou qui la détourne continuellement de la direction rectiligne, à la gravité qui fait tomber ici-bas les corps terrestres. En effet, nous savons, par les observations astronomiques et géodésiques, que le rayon du globe terrestre vaut 3265000 toises * ; que la moyenne distance de la lune à la terre vaut 60 fois le rayon du globe terrestre ; et que la lune fait sa révolution autour de la terre en 27 jours 7 heures 43 minutes. Or, d'après ces données, on trouve, 1.° la circonférence entière de l'orbite lunaire, et la longueur de l'arc que la lune décrit en un temps donné, par exemple en une minute ; 2.° on trouve la force centripète de la lune, ou la quantité dont cet astre est rappelé vers la terre, en une minute, cette quantité étant sensiblement une troisième proportionnelle au diamètre de l'orbite lunaire, et à l'arc que la lune parcourt en une minute. En exécutant tous ces calculs, on parvient à cette conclusion, que la

* Je néglige dans ces calculs, de petites quantités qui ne feraient que les allonger inutilement, mon but étant simplement de faire connaître l'esprit des méthodes.

quantité dont la lune dévie de la tangente ou s'approche de la terre, en une minute, est d'environ 15 pieds; et comme d'un autre côté, on sait, par l'expérience, qu'un corps grave, tombant à la surface de la terre, parcourt quinze pieds dans la première seconde de sa chute, ou 3600 pieds pendant la première minute, on voit que de la terre à la lune la pesanteur n'est pas constante, et qu'elle diminue dans le rapport de 3600 à 1, c'est-à-dire dans le rapport du carré de 60 au carré de 1, ou du carré de la distance moyenne de la lune à la terre, au carré du rayon de la terre. Telle est la première épreuve qu'on a faite de cette fameuse loi de la gravitation des astres, en raison inverse des carrés des distances.

V.

On verra bientôt une foule d'autres applications de la même loi; mais auparavant je ne puis m'empêcher de joindre ici un exemple remarquable à tous ceux que l'on a déjà, de la lenteur avec laquelle se succèdent les connaissances humaines.

Quinze années avant que le livre de Neuton parût, Huguens avait donné en treize propositions les propriétés de la force centrifuge ou centripète dans le cercle. S'il lui fût venu en pensée d'appliquer cette théorie au mouvement de rotation de la terre autour de son axe, et au mouvement de la lune au- Horologium oscillatorium, 1673.

tour de la terre, il aurait découvert la loi de la gravitation de la lune vers la terre. Car, suivant les propositions II et III, combinées ensemble, la force centrifuge de la lune est à la force centrifuge à la surface de la terre, comme le carré de l'espace que la lune parcourt en une minute, divisé par 60, est au carré de l'espace qu'un point de la surface de la terre parcourt aussi en une minute, divisé par 1; et suivant la proposition V, combinée avec l'expérience qui nous apprend que les corps graves, à la terre, parcourent 15 pieds pendant la première seconde de la chute, ou 15 fois 3600 pieds en une minute, on trouve que la force centrifuge d'un point à la surface de la terre, est à la gravité, comme 1 est à 289. Or, en multipliant terme à terme ces deux proportions, et effectuant les calculs indiqués, il résulte que la force centrifuge de la lune est à la gravité à la surface de la terre, comme 1 est à 3600; ce qui est la conclusion du philosophe anglais. Mais Huguens n'a pas fait cette application; et la gloire de la découverte appartient à Neuton.

SECTION II.

Développement du principe de l'attraction. Applications au mouvement elliptique des planètes.

I.

DE même que la lune gravite vers la terre, la terre gravite à son tour vers la lune. En général, si de deux corps mis en présence, l'un attire l'autre, pourquoi celui-ci n'attirerait-il pas également le premier? L'action et la réaction doivent toujours être égales, suivant les lois de la mécanique. Or, l'attraction de chaque corps n'étant autre chose que la somme des attractions de toutes ses molécules élémentaires, est proportionnelle à sa masse totale; d'où il suit que les deux corps proposés doivent s'approcher l'un de l'autre avec des vitesses réciproquement proportionnelles à leurs masses. Ainsi, par exemple, une pierre qui tombe à la surface de la terre, est attirée par le globe terrestre, et elle attire à son tour ce globe; mais la vitesse de la pierre est plus grande que celle du globe, en même raison que la masse du globe est plus grande que celle de la pierre; et par conséquent la vitesse du globe est comme nulle.

La gravitation est réciproque entre les corps.

Lorsque la distance des deux corps vient à changer, l'attraction de chacun d'eux varie à chaque instant en raison inverse du carré de la distance.

Cette loi s'observe dans tous les corps qui composent l'univers; elle règle et entretient les mouvemens des astres; les étoiles, le soleil, les planètes principales, les satellites, les comètes, éprouvent son action. Considérons d'abord les principaux effets de cette force dans notre monde planétaire.

II.

Théorie générale de l'attraction.

Neuton démontre en général que si un corps lancé dans l'espace est continuellement détourné de sa direction par une force quelconque qui le pousse vers un point fixe, et qui lui fait décrire une courbe, les aires des secteurs compris entre les arcs de la courbe, et les lignes droites menées du corps circulant au point fixe, sont proportionnelles aux temps employés à parcourir les arcs de la courbe. *Et vice versâ,* que si les aires sont proportionnelles aux temps, le corps est continuellement attiré vers le point fixe. Or, les planètes principales tournent autour du soleil; donc, en regardant cet astre comme fixe, on voit que chaque planète est attirée continuellement vers le soleil. Mais rien ne fait connaître encore la loi de cette attraction. Képler va fournir les *données* qui la déterminent. Suivant les observations et les calculs

de ce grand astronome, les planètes décrivent des aires proportionnelles aux temps, autour du soleil; et leurs orbites sont des ellipses. De ces deux conditions, Neuton a conclu, par la géométrie, que le soleil occupe le foyer de l'ellipse décrite par une planète, et que la tendance de cette planète vers le soleil, varie d'un point à l'autre de la courbe, en raison inverse des carrés des distances. Voilà donc le moyen de comparer ensemble les gravitations d'une même planète sur le soleil, en deux points quelconques de son orbite; mais cela n'était pas suffisant : il fallait de plus savoir comparer les gravitations de deux planètes différentes; car il pouvait se faire que d'une planète à l'autre, la gravitation ne suivît pas le rapport des carrés inverses des distances; ce qui eût enlevé au principe sa généralité et ses avantages les plus importans. La seconde loi de Képler, la proportionnalité des carrés des temps aux cubes des moyennes distances, complète cette théorie, et rappelle toutes les attractions à l'unité : elle fait voir que toutes les planètes principales sont attirées vers le soleil par une force qui agit sur les deux planètes que l'on compare, de la même manière (à peu de chose près *), que si ces deux planètes ne formaient qu'un seul et même corps, placé successivement à différentes

* On verra bientôt la raison de cette restriction.

distances du soleil. Ainsi, par exemple, la tendance de Mars vers le soleil est à la tendance de Jupiter vers le même astre, comme le carré de la distance de Jupiter au soleil est au carré de la distance de Mars au soleil.

III.

Cependant il restait encore une difficulté apparente : on a regardé dans le calcul précédent le soleil comme fixe; mais réellement le soleil se meut vers la planète circulante, puisque l'attraction de ces deux corps est réciproque. Cela n'apporte néanmoins aucun changement dans les rapports que nous avons établis; car si l'on cherche en général les courbes que décrivent deux corps lancés suivant des directions quelconques, dans un même plan, et qui, s'attirant mutuellement, parcourent en conséquence l'un vers l'autre des espaces réciproquement proportionnels à leurs masses ; on trouvera que ces deux corps décrivent quatre courbes semblables : savoir, chacun une autour de l'autre considéré comme fixe, et chacun une autre autour de leur centre de gravité commun, qui peut d'ailleurs être en repos, ou se mouvoir uniformément en ligne droite. D'où il résulte, par exemple, que l'ellipse de Mars autour du soleil mobile, est semblable à l'ellipse qu'il décrirait autour du soleil fixe: la seule différence est que dans le

second cas, l'ellipse serait décrite dans l'espace absolu, au lieu que dans le premier, l'ellipse est décrite dans l'espace relatif, et c'est la seule dont on ait besoin dans l'astronomie, où l'on ne considère que les mouvemens relatifs. La courbe décrite dans l'espace absolu est une espèce d'épicycloïde, inutile à connaître.

Du reste, il s'en faut peu que le soleil ne soit véritablement immobile; car sa masse est si grande, qu'en supposant même que toutes les planètes principales fussent placées d'un même côté, le centre de gravité de tout le système ne tomberait qu'un peu au-dessus de la surface du soleil.

Tout ce que nous avons dit pour le soleil et les planètes principales, a également lieu pour les planètes principales et leurs satellites.

IV.

Différens systèmes planétaires.

Notre monde planétaire est composé de différens systèmes qu'il faut distinguer, lorsqu'on veut comparer les mouvemens de l'un aux mouvemens de l'autre. D'abord le soleil et les planètes principales forment un système, le soleil pouvant être regardé comme une planète centrale, et les planètes principales comme ses satellites; la terre et la lune forment un second système; Jupiter et ses satellites, autre système, etc. Dans un même système, les carrés des temps des révolutions pério-

diques de deux satellites autour de la planète centrale, sont sensiblement comme les cubes de leurs moyennes distances à cette planète, conformément à la seconde loi de Képler; mais cela n'a pas lieu d'un système à l'autre : par exemple, le carré du temps de la révolution périodique de Mars autour du soleil n'est pas au carré du temps de la révolution périodique de la lune autour de la terre, comme le cube de la moyenne distance de Mars au soleil, est au cube de la moyenne distance de la lune à la terre. La raison de cette différence est que dans un même système, la masse de la planète centrale est très-grande par rapport à la masse du satellite, et que par conséquent on peut négliger sensiblement celle-ci en comparaison de l'autre : de sorte que la somme faite de la masse centrale et de la masse du satellite, est une quantité qu'on peut regarder comme la même pour tous les corps circulans d'un même système; d'où résulte à peu près la simple proportionnalité des carrés des temps aux cubes des moyennes distances. Mais quand on passe d'un système à l'autre, la somme faite d'une masse centrale et de celle de son satellite, peut différer beaucoup de la somme faite de l'autre masse centrale et de celle de son satellite; ce qui empêche la proportion précédente d'avoir lieu. Alors les carrés des temps des révolutions des deux satellites, chacun autour de sa planète prin-

cipale, sont entr'eux comme les cubes de leurs distances moyennes à ces planètes, divisés par les sommes faites de chaque masse centrale et de celle de son satellite.

V.

Ce dernier théorème est très-important. Il nous procure l'avantage de pouvoir comparer la masse du soleil à celle d'une planète principale qui a au moins un satellite. C'est ainsi que Neuton a trouvé qu'en représentant la masse du soleil par 1, les masses de Jupiter, de Saturne et de la terre, sont respectivement représentées par les fractions $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, $\frac{1}{169282}$. Les élémens de ces calculs ne sont pas bien exacts; mais les résultats suffisent pour faire comprendre l'esprit de la méthode.

Les quatre masses dont il s'agit expriment les forces, ou plutôt les rapports des forces avec lesquelles un même corps, ou des corps égaux, placés à égales distances des centres du soleil, de Jupiter, de Saturne et de la terre, seraient attirés par ces quatre planètes. Si l'on veut connaître les forces avec lesquelles ils seraient attirés, s'ils étaient placés immédiatement aux surfaces de leurs planètes respectives, il faudra diviser les masses de ces planètes par les carrés de leurs rayons : alors, en supposant avec Neuton, que les rayons du soleil, de Jupiter, de Saturne et de la terre, sont comme les nombres 10000; 997; 791; 109; on trouvera que

Princ. math. liv. III, prop. VIII.

les forces demandées sont comme les nombres 10000; 943; 529; 435.

Il suit de là que les densités du soleil, de Jupiter, de Saturne et de la terre, ou les quotiens des masses divisées par les volumes, sont comme les nombres 100; 94 ½; 67; 400.

Quant aux masses des planètes principales qui n'ont pas de satellites, elles se trouvent par d'autres phénomènes qu'on exposera ci-dessous.

VI.

J'ajouterai ici deux remarques qui méritent attention : la première, que les distances des planètes principales au soleil ne se règlent point sur les masses, puisque d'un côté, la terre, moins massive que Jupiter et Saturne, est plus voisine qu'eux du soleil, et que de l'autre, Jupiter, moins éloigné du soleil que Saturne, a cependant plus de masse. La seconde remarque est que les densités ne suivent pas non plus d'ordre, relativement aux distances des planètes au soleil. Le système neutonien ne peut pas rendre raison de ces phénomènes.

SECTION III.

Suite. Figure de la terre par la théorie.

I.

LORSQU'ON eut reconnu, par l'expérience de Richer à Cayenne, que la pesanteur diminue en allant du pôle à l'équateur, Huguens expliqua ce phénomène, comme nous l'avons vu, par la diminution que la force centrifuge apporte à la pesanteur naturelle; il détermina de plus les longueurs qu'un pendule doit avoir pour battre les secondes à toutes les latitudes, et il conclut que la terre doit être un sphéroïde aplati vers les pôles, sans rien prononcer néanmoins sur la nature précise de ce sphéroïde; il observa seulement que la courbe de chaque méridien devait être telle que la pesanteur *actuelle*, ou la résultante de la pesanteur *primitive*, et de la *force centrifuge*, fût partout dirigée perpendiculairement à la surface de la terre, ou au niveau d'une eau tranquille. Hug. Op. t. III, p. 99.

Environ treize ans après, Neuton chercha les dimensions du globe terrestre, en combinant la force centrifuge avec la gravitation réciproque des parties de ce globe. Il regarde la masse comme ori- Princ. math. liv. III, prop. XIX.

ginairement fluide et homogène : il suppose, sans le démontrer, que la figure de la terre est celle d'un sphéroïde elliptique aplati, peu différent de la sphère; il calcule le poids de la colonne qui va du pôle au centre, et celui d'une colonne équatorienne; il égale l'excès du second poids sur le premier, à la somme des forces centrifuges de toutes les parties de la colonne équatorienne, et enfin il conclut que le diamètre de l'équateur est, à l'axe de rotation, à peu près comme 230 est à 229.

Huguens ayant lu l'ouvrage de Neuton, fit à son traité *de Causâ gravitatis*, une addition dans laquelle il détermine le rapport des axes de la terre, en empruntant quelque chose du géomètre anglais, sans admettre cependant le principe de l'attraction. Il suppose que la pesanteur primitive est partout constante, et partout dirigée au centre; il déduit du poids de la colonne équatorienne la somme des forces centrifuges de ses parties, et égalant le reste au poids de la colonne polaire, il trouve le rapport de 578 à 577 pour celui du diamètre de l'équateur à l'axe de rotation. Passant ensuite à la recherche générale de la figure du méridien, il établit d'abord la proportion qui doit avoir lieu afin que la direction de la pesanteur actuelle soit perpendiculaire à la surface de la terre. Cette proportion mène immédiatement à une équation différentielle, qui se rapporte à la méthode inverse des tangentes; Hu-

guens achève la solution par le principe, alors plus simple, de l'équilibre des colonnes centrales. L'équation à laquelle on parvient de l'une ou de l'autre manière, est du quatrième ordre.

Huguens et Neuton n'avaient pas résolu complètement le problème : Huguens, parce qu'il ne connaissait pas la véritable loi de la pesanteur primitive; Neuton, parce qu'en partant de cette loi, il supposait que la terre avait la figure d'un sphéroïde elliptique; supposition qu'il aurait fallu démontrer *a priori*.

II.

La question demeura dans cet état pendant longtemps. En 1734, Bouguer et Maupertuis entreprirent de la résoudre, en proposant différentes hypothèses sur la nature de la pesanteur primitive, comme, par exemple, que cette force était proportionnelle à une puissance de la distance au centre de la terre. Ensuite leurs méthodes revenaient à faire en sorte que la résultante de la pesanteur primitive et de la force centrifuge fût perpendiculaire à la surface de la terre, suivant le principe de Huguens; ou que les colonnes centrales se fissent mutuellement équilibre, suivant celui de Neuton. L'observation simultanée des deux principes était nécessaire, pour établir tout à la fois l'équilibre à la surface et dans l'intérieur de la planète. Mais Ac. de Paris, 1734.

comme, en plusieurs cas, ils ne donnaient pas la même courbe pour le méridien, Bouguer et Maupertuis concluaient qu'on ne pouvait admettre que les solutions où les deux principes menaient à la même équation : conclusion vague, qui laissait les choses dans l'indétermination. Leurs problèmes, d'ailleurs peu difficiles, n'avaient qu'un rapport éloigné et indirect à celui qu'il fallait résoudre. Il n'y a point d'hypothèse à faire sur la nature de la pesanteur; cette force est comme la masse divisée par le carré de la distance. C'est en calculant les attractions réciproques de toutes les molécules les unes sur les autres, qu'il faut chercher la figure du sphéroïde terrestre.

III.

La supposition de Neuton, que cette figure est celle d'un ellipsoïde, lorsque l'aplatissement est très-petit, fut enfin démontrée par Stirling et Clairaut, dans les *Transactions philosophiques*, pour les années 1736 et 1737. Mais si ce cas limité suffisait dans l'état physique et actuel des choses, les géomètres désireraient qu'on poussât la théorie plus loin.

MACLAURIN, né en 1698, mort en 1746. Maclaurin eut la gloire de remplir leur vœu dans sa pièce *sur le flux et reflux de la mer*, qui partagea le prix de l'académie des sciences de Paris, en 1740. Il fit voir en général que si un sphé-

roïde produit par la révolution d'une demi-ellipse autour du petit axe ou du grand axe, est composé d'une matière fluide homogène, dont toutes les molécules s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances, et sont de plus soumises à l'action de la force centrifuge qui résulte de la rotation du sphéroïde autour de l'axe de révolution, toute la masse fluide sera en équilibre. Ce beau théorème est fondé sur trois propositions que l'auteur démontre en toute rigueur : la première, que la pesanteur actuelle est perpendiculaire en chaque point à la surface du sphéroïde; la seconde, que deux colonnes quelconques, aboutissant au centre, se font mutuellement équilibre; la troisième, qu'un point quelconque, pris dans l'intérieur du sphéroïde, est également pressé en toutes sortes de sens, ou que toutes les colonnes dirigées vers ce point pèsent également. Il étend la même théorie au problème où les particules de la terre, toujours soumises à leurs attractions mutuelles et à la force centrifuge, éprouveraient de plus les attractions de la lune et du soleil; ce qui est le cas du flux et reflux de la mer. Il donne plusieurs autres théorèmes remarquables sur les attractions des sphéroïdes ellipsoïdaux, qui ont pour équateurs des cercles ou des ellipses, et il en fait l'application à la figure des planètes, et aux phénomènes des marées. La méthode qu'il emploie pour démontrer

ses principales propositions, est purement synthétique, et passe, au jugement des géomètres, pour un chef-d'œuvre de sagacité et d'invention, égal à tout ce qu'Archimède et Apollonius nous ont laissé de plus admirable.

En restreignant cette théorie générale au cas particulier où la terre, supposée originairement fluide et homogène, forme un sphéroïde elliptique aplati, en vertu de l'attraction et de la force centrifuge, Maclaurin trouve que les deux axes de ce sphéroïde sont entr'eux comme 230 et 229, ainsi que Neuton l'avait conclu de ses principes et de quelques suppositions qui par là sont vérifiées.

IV.

Clairaut, qui s'était déjà occupé de ce sujet, comme nous l'avons vu, et qui de plus venait de participer à la mesure du méridien terrestre en Laponie, avait acquis un droit bien légitime d'examiner tout de nouveau la question, par la théorie et par les observations. Il remplit cet objet dans son livre intitulé : *Figure de la terre, tirée des lois de l'hydrostatique,* 1743.

Après avoir établi en général que l'équilibre d'une masse fluide dépend de celui d'un canal de figure quelconque qui la traverse, ou qui rentre en lui-même, il résout facilement les problèmes de Bouguer et de Maupertuis, et à cette occasion il

fait voir qu'il existe une infinité d'hypothèses de pesanteur, où le fluide ne demeurerait pas en équilibre, quand même les deux principes de Huguens et de Neuton seraient observés à la fois. Il donne les caractères généraux pour reconnaître les hypothèses qui admettent l'équilibre, et pour déterminer la figure que le fluide doit prendre; il applique sa théorie à divers phénomènes, et entr'autres à celui des tuyaux capillaires. De là il vient au véritable objet de la question, c'est-à-dire à la recherche de la figure de la terre, en supposant que ses particules s'attirent en raison inverse des carrés des distances, et qu'elle tourne autour de son axe. Il commence par le cas de l'homogénéité de la masse fluide; et sur ce point il abandonne sa propre méthode pour suivre celle de Maclaurin, à laquelle il donne la préférence avec une franchise noble et rare. Ensuite, sans plus rien emprunter de personne, il fait d'autres recherches très-profondes; il explique la manière de reconnaître les variations de la pesanteur depuis l'équateur jusqu'au pôle, dans un sphéroïde composé de couches dont les densités et les ellipticités suivent une loi donnée, du centre à la surface; il détermine la figure que la terre aurait, si, en la supposant d'ailleurs entièrement fluide, elle était un assemblage de couches de différentes densités; il compare sa théorie avec les observations, et dans cette com-

paraison, il examine les erreurs qu'il faudrait attribuer aux observations, afin que les dimensions du sphéroïde terrestre fussent à peu près telles que la théorie le demande. Tant de vues utiles et nouvelles ont placé cet ouvrage de Clairaut au nombre des productions de génie qui honorent les sciences.

V.

Cependant il restait encore dans cette matière épineuse et féconde, plusieurs questions particulières et importantes à examiner, tant sur la loi des densités du sphéroïde terrestre, que sur les conditions de l'équilibre auxquelles cette loi est assujétie, suivant les différens cas. D'Alembert a publié un très-grand nombre d'excellens mémoires
An 1752, 1754, 1761, 1768. sur ce sujet, dans son *Essai sur la résistance des fluides,* dans ses *Recherches sur le système du monde,* et dans ses *Opuscules mathématiques.* Je regrette qu'ils ne soient pas ici susceptibles d'extraits. Je me contenterai de remarquer que l'auteur a donné une méthode, long-temps désirée des géomètres, pour déterminer l'attraction du sphéroïde terrestre, dans une infinité d'autres hypothèses que celle de la figure elliptique. Il imagine que le rayon de ce sphéroïde est représenté par une formule qui contient une quantité constante, plus la suite de toutes les puissances entières positives des sinus de latitude; et il détermine l'at-

traction d'un pareil sphéroïde sur un corpuscule placé à sa surface; ce qui renferme, comme on voit, le cas particulier et ordinaire, où de toutes ces puissances il n'entre dans la valeur du rayon que le carré du sinus de latitude. Cet important problème et ses corollaires auraient pu fournir le sujet d'un nouveau traité de la figure de la terre.

L'auteur avait d'abord supposé que les méridiens de la terre étaient égaux et semblables; mais par de nouveaux efforts, il parvint à déterminer aussi l'attraction d'un sphéroïde qui n'est pas un solide de révolution; ce qui serait utile, si en effet le globe terrestre avait une autre figure.

VI.

Aplatissement des planètes.

La théorie générale de la figure de la terre est applicable au soleil et à toutes les planètes qui tournent sur elles-mêmes. Cette rotation produit un aplatissement plus ou moins grand, selon qu'elle est plus ou moins rapide. Par exemple, dans Jupiter qui tourne sur lui-même en 10 heures environ, le diamètre de l'équateur et l'axe de rotation sont entr'eux comme les nombres 14 et 13. Dans la lune dont la rotation est fort lente, la différence entre le diamètre de l'équateur et l'axe de rotation est presqu'insensible.

Il peut arriver qu'une planète éprouve de la part des autres corps célestes, une attraction qui

l'allonge dans ce sens plus qu'elle n'est aplatie par sa rotation. La lune nous en offre un exemple. Par l'attraction de la terre, le diamètre de la lune, dirigé vers nous, est sensiblement plus grand que l'axe de rotation ou tout autre diamètre de cette planète.

Les étoiles étant autant de soleils semblables à celui qui nous éclaire, peuvent avoir comme lui des mouvemens de rotation sur elles-mêmes. Il peut encore se faire que l'axe de rotation d'une étoile vienne à changer de position dans le ciel, par une cause quelconque, telle que serait, par exemple, l'attraction de quelqu'immense corps qui passerait dans le voisinage de l'étoile. Ces hypothèses, très-plausibles, servent à expliquer fort simplement pourquoi certaines étoiles paraissent et disparaissent, et pourquoi quelques-unes changent de grandeur et de clarté. Lorsqu'une étoile nous présente le plan de son équateur, nous la voyons sous la forme circulaire, et dans sa plus grande clarté, comme si elle était parfaitement sphérique. Mais si une étoile est fort aplatie, et que le plan de son équateur vienne à s'incliner par rapport à nous, elle diminue de grandeur apparente et de clarté; elle pourra même disparaître entièrement à nos yeux, lorsque venant à nous présenter son tranchant, nous ne recevrons plus assez de rayons pour l'apercevoir. Par un mouvement contraire du plan

de leur équateur, nous pouvons voir de nouvelles étoiles qui disparaissent ensuite, en retournant à leur premier état : telle fut la grande étoile qu'on vit, en 1572, dans la constellation de Cassiopée.

Maupertuis, auteur de cette explication ingénieuse, compare les étoiles ainsi aplaties, à des espèces de meules de moulin : expression familière qui donne une idée générale de l'objet, et qui n'a rien de ridicule, quoiqu'en dise Voltaire, devenu l'ennemi mortel d'un homme à qui il écrivait autrefois, après avoir lu son livre de la figure de la terre : *Certainement vous savez peindre, et il n'a tenu qu'à vous d'être notre plus grand poëte, comme vous êtes notre plus grand géomètre.* S'il y a du ridicule, il est dans cette basse exagération. Diatribe du doct. Akakia.

SECTION IV.

Suite. Flux et reflux de la mer.

I.

TOUT le monde sait que dans les mers vastes et profondes, les eaux montent et descendent tour à tour, pendant l'espace d'environ six heures; de sorte qu'en un jour, ou en vingt-quatre heures, il

y a deux marées, chacune étant composée d'un flux et d'un reflux. Par l'action du flux, les eaux s'élèvent, inondent les rivages, font remonter contre leur courant les rivières qui se jettent dans la mer : le reflux produit l'effet contraire, ramène les eaux au point le plus bas, d'où elles recommencent à s'élever, pour s'abaisser de nouveau; ainsi de suite alternativement. Il n'y a que l'Océan où les mouvemens de flux et de reflux soient bien sensibles : ils ne se font remarquer que très-peu, ou même point du tout, dans les lacs, les rivières, et en général dans tous les amas d'eaux peu considérables par rapport à l'Océan. Quelquefois cependant, dans les mers Méditerranées, les eaux forcées de passer dans des endroits resserrés, manifestent des mouvemens de flux et de reflux : par exemple, on observe de tels mouvemens à la pointe du golfe de Venise : ils sont très-petits, ou comme nuls dans la plus grande étendue des côtes de la Méditerranée.

Les anciens philosophes avaient remarqué, et on attribue principalement cette observation à Pithéas, que les marées suivent le cours de la lune. Strabon explique en détail l'opinion d'Eratosthène, conformément à la même pensée : il ajoute que Posidonius et Athénodore avaient traité au long du flux et du reflux de la mer; mais leurs ouvrages ne sont pas arrivés jusqu'à nous.

Géog. lib. 1.

II.

Lorsque dans les temps modernes, les sciences commencèrent à se renouveler en Europe, on ne pouvait manquer de chercher les causes d'un phénomène si extraordinaire et si merveilleux.

Galilée croyait l'expliquer par la combinaison du mouvement de rotation de la terre autour de son axe, avec son mouvement annuel autour du soleil. Mais il est évident, 1.° que la rotation de la terre n'a pu avoir d'autre effet que d'élever les eaux de la mer vers l'équateur, ou de faire prendre à la terre la figure d'un sphéroïde aplati, mais qu'elle ne peut pas produire les balancemens alternatifs du flux et du reflux. 2.° Qu'en vertu du mouvement annuel, toutes les parties de la terre, solides ou fluides, ayant la même vitesse, au moins sensiblement, à cause de l'extrême petitesse du rayon de la terre, comparativement à celui de l'écliptique, elles conservent toujours entr'elles la même position, comme si le globe terrestre demeurait constamment en repos. Système de Galilée.

L'explication de Descartes a eu plus de succès, au moins pour un temps. Elle suppose que les eaux de la mer s'élèvent en vertu d'une pression que la lune, parvenue au méridien, exerce sur la portion d'atmosphère placée entr'elle et la mer, et qu'ensuite elles retombent par leur pesanteur, Système de Descartes.

quand la lune s'abaisse. Mais pour qu'une telle pression eût lieu, il faudrait que l'atmosphère, placée sous la lune, trouvât des points d'appui qui l'empêchassent de s'étendre en tous sens : autrement la lune ne fait que prendre la place d'un volume d'air égal au sien, et laisse les eaux de la mer dans le même état où elles étaient.

III.

Vraie explication.

Il n'y a point de doute aujourd'hui que la gravitation étant réciproque entre tous les corps de l'univers, les mouvemens de flux et de reflux de la mer sont produits par les attractions de la lune et du soleil, combinées avec le mouvement journalier de rotation de la terre autour de son axe. Lorsque la lune est au méridien, elle attire les eaux de la mer, qui sont de petits corps détachés du reste du globe; elle attire aussi toute la masse de la terre, qu'il faut regarder comme réunie entièrement à son centre : or, comme les eaux sont plus proches de la lune que le centre de la terre, elles sont *plus* attirées que le centre, et par conséquent elles doivent, pour ainsi dire, abandonner la terre et s'élever; ce qui produit le flux. Au contraire, au point diamétralement opposé, ou aux antipodes du lieu actuel, les eaux, comme plus éloignées, sont *moins* attirées que le centre de la terre, et par conséquent elles doivent paraître *fuir* ce centre,

ou s'élever ; ce qui produit encore le flux. Ainsi, dans l'un et l'autre lieu, le mouvement du flux est produit par la *différence* entre les attractions de la lune sur les eaux et sur le centre de la terre, et il doit arriver en même temps aux deux extrémités du diamètre terrestre dirigé vers la lune. Quant au reflux, il arrive lorsque la lune ayant passé le méridien, sa force d'attraction diminue, et laisse à la pesanteur propre des eaux la force de les abaisser. Tout ce que je viens de dire relativement à la lune, s'applique aussi au soleil.

Les différentes positions respectives de la lune et du soleil font que les effets de ces deux astres tantôt s'ajoutent, tantôt se détruisent en partie, ce qui produit des marées composées. On distingue les parts de la lune et du soleil, par les dénominations particulières de *marées lunaires* et *marées solaires*. Quoique la masse de la lune soit considérablement moindre que celle du soleil, les marées lunaires sont néanmoins beaucoup plus grandes que les marées solaires, à cause de l'énorme différence entre les éloignemens du soleil et de la lune à la terre.

Comme les eaux de la mer résistent, par leur inertie, à prendre le mouvement que la lune et le soleil tendent à leur imprimer, elles ont besoin d'un certain temps pour s'élever et pour s'abaisser. De là vient que la plus grande hauteur du flux n'ar-

rive qu'environ trois heures après que la lune a passé au méridien, et que le reflux est retardé de même.

Neuton explique les phénomènes des marées, en partant de la supposition que la terre, originairement fluide et homogène, est un sphéroïde aplati, dont les axes sont entr'eux comme 230 et 229. Il trouve que les marées lunaires sont environ quadruples des marées solaires; et il en conclut, par une suite de propositions fondées sur la théorie des forces centrales, que la masse de la lune est environ la trente-neuvième partie de celle de la terre; ce qui ne s'accorde guère avec les phénomènes de la précession des équinoxes. La même supposition l'a conduit à cette autre conséquence, que dans les quadratures les forces provenant de la lune et du soleil, n'élèvent les eaux en pleine mer que d'environ trois pieds, quantité qui ne paraît pas suffisamment conforme aux résultats de diverses observations.

IV.

Cette matière est beaucoup plus approfondie dans trois excellentes pièces, fondées d'ailleurs sur la même théorie, qui partagèrent le prix de l'académie des sciences de Paris, en 1740. Elles ont pour auteurs Daniel Bernoulli, Maclaurin et Euler.

La pièce de Maclaurin est principalement remarquable par le théorème sur la figure de la terre, que j'ai rapporté ci-devant.

Celle d'Euler contient plusieurs nouvelles découvertes analytiques très-ingénieuses, et l'explication de quelques phénomènes particuliers qui semblaient donner peu de prise au calcul, comme, par exemple, le mouvement des eaux dans certains détroits, en ayant égard aux circonstances locales qui doivent modifier leur cours.

Daniel Bernoulli s'est appliqué, avec un soin particulier, à traiter la partie physique de la question, dans toute son étendue. Il abandonne l'hypothèse de l'homogénéité de la terre : il suppose que cette planète est composée de couches dont les densités augmentent, suivant une certaine loi, de la circonférence au centre; et par là, il explique avec plus d'exactitude que Neuton, des phénomènes des marées. Il trouve que les marées lunaires et les marées solaires, sont entr'elles, à très-peu de chose près, comme les nombres 5 et 2; d'où il conclut que la masse de la lune n'est qu'environ la soixante-dixième partie de celle de la terre : résultat qui a été confirmé par la théorie de la précession des équinoxes.

Si les eaux de la mer se mouvaient sur un fond uni, elles obéiraient exactement aux actions de la lune et du soleil; mais elles rencontrent divers

obstacles qui changent ou rallentissent leurs mouvemens. Le lit de la mer est raboteux comme la surface de la partie solide du globe; il est couvert de montagnes et de vallées, dirigées en toutes sortes de sens, et d'une étendue souvent considérable, soit en hauteur, soit en largeur. Toutes ces inégalités altèrent le mouvement des eaux; elles font naître des courans particuliers, plus ou moins grands, plus ou moins rapides, suivant la figure et les dimensions des sillons que les eaux sont forcées de suivre. De là résultent différentes hauteurs dans les marées, différentes heures dans les *établissemens* des ports, à raison des différentes positions de ces ports par rapport aux courans. Daniel Bernoulli est entré dans plusieurs détails très-intéressans sur tous ces objets.

La fidélité de l'histoire ne me permet pas de taire que notre académie, en couronnant ces trois belles pièces, leur en associa une quatrième, toute cartésienne, d'un jésuite appelé *Cavaleri*. Cette association fut tournée en ridicule par les Anglais, qui avaient déjà marqué de l'étonnement de ce que Fontenelle, dans l'éloge de Neuton, avait *osé* lui comparer Descartes. Mais, pour parler ici raison, il faut connaître la manière dont l'académie jugeait les pièces envoyées au concours. Ne pouvant porter ce jugement en corps, elle choisissait, parmi ceux de ses membres qui s'occupaient

des matières de géométrie et de physique, cinq commissaires, auxquels elle conférait le pouvoir absolu et sans appel d'examiner les pièces, et de décerner le prix, ou de le remettre à une autre année. Or, ce choix était un peu embarrassant dans le cas présent. Il est vrai que l'académie possédait alors plusieurs savans géomètres, tels que Maupertuis, Fontaine, Nicole, Clairaut, Bouguer, Camus; mais Bouguer était au Pérou; Fontaine passait presqu'entièrement sa vie à la campagne, et d'ailleurs il était comme étranger aux sciences physico-mathématiques; Maupertuis, par son caractère altier et impérieux, était exclus de presque tous les comités où il aurait pu donner des avis utiles; Camus ne s'occupait guère que de la mécanique. Dans cette pénurie, on nomma pour commissaires, Réaumur, Mairan, Pitot, Nicole et Clairaut. Les trois premiers étaient des cartésiens invétérés, peu versés dans la géométrie transcendante, dont la connaissance approfondie était cependant nécessaire pour entendre Daniel Bernoulli, Maclaurin et Euler. Ils proposèrent d'admettre la pièce de Cavaleri au partage du prix, disant que le *néutonianisme* et le *cartésianisme* étaient des *systèmes* entre lesquels l'académie ne devait pas prendre de parti. Nicole, qui craignait toujours quelqu'abus du calcul dans les matières de physique, penchait néanmoins à rejeter ce partage.

Clairaut fut le seul qui s'y opposa fortement. Je lui ai entendu dire plusieurs fois qu'il avait fait les derniers efforts pour l'empêcher. La pluralité des voix prévalut. Si la pièce de Cavaleri ne méritait pas l'honneur qu'on lui accorda, elle avait du moins l'avantage d'exposer clairement les phénomènes des marées.

Il résulte, ce me semble, de ce récit très-exact dans tous les points, que Réaumur, Mairan et Pitot, doivent porter seuls, aux yeux de la postérité, le blâme qu'on a voulu jeter sur le corps entier de l'académie. Si toutefois on veut absolument la rendre responsable de ce jugement, elle ne tarda pas de réparer son tort. Ce fut là, pour ainsi dire, le dernier soupir du cartésianisme dans son sein. Bientôt les travaux de ses propres membres, et les sujets de prix qu'elle proposa, se joignant aux trois pièces de Daniel Bernoulli, Maclaurin et Euler, portèrent le neutonianisme à un degré de certitude et de perfection, que l'inventeur et ses successeurs immédiats n'avaient pu que préparer.

V.

Cause générale des vents.

Je citerai d'abord en preuve de cette assertion (et on en verra bientôt d'autres exemples), l'explication que d'Alembert donna, par la théorie neutonienne, *de la cause générale des vents,* dont l'académie de Berlin avait fait le sujet d'un prix

pour l'année 1746. Ce problème est de même nature que celui du flux et du reflux de la mer; mais il avait de grandes difficultés particulières. Les actions de la lune et du soleil, qui traversent l'atmosphère pour aller agiter les eaux de la mer, doivent aussi nécessairement agiter l'air qui environne la terre, et y produire des courans assujétis aux mêmes lois, lorsque la lune et le soleil se trouvent dans les mêmes positions. Quoique les mouvemens de l'air reçoivent différentes modifications par la chaleur, par la direction et la forme des montagnes et des vallées, ces changemens sont bornés; et on ne peut pas au moins douter que les vents périodiques et réglés, qui règnent constamment d'orient en occident entre les deux tropiques, ne soient produits par les actions réunies de la lune et du soleil. D'Alembert a traité cette matière à fond. Sa pièce, qui remporta le prix, contient les premières notions un peu développées, qui aient paru sur le calcul intégral aux différences partielles.

SECTION V.

Causes de la marche lente du neutonianisme en France. Recherches liées à ces causes.

Avant de pousser plus loin l'explication du neutonianisme, je m'arrêterai un moment sur les causes qui en ont retardé le progrès en France, et sur quelques autres recherches que ces mêmes causes ont fait naître.

I.

Véritable objet du neutonianisme.

La curiosité humaine est insatiable; mais les hommes sont paresseux; et aussitôt qu'ils sont parvenus à soulever un coin du grand voile qui couvre la nature, ils voudraient que cette première connaissance les menât à l'explication de tous les phénomènes, par une suite de corollaires d'un seul et même principe. On ne pouvait pas nier que le neutonianisme ne rendît très-bien raison des mouvemens célestes, tels que les observations les avaient fait connaître; mais les savans à systèmes demandaient de plus qu'on leur dît pourquoi toutes les planètes tournent d'occident en orient, plutôt que dans tout autre sens; pourquoi tournant

dans le même sens, elles ne suivent pas néanmoins des plans exactement parallèles; pourquoi les distances des planètes au soleil ne dépendent pas de leurs masses; pourquoi les comètes traversent les espaces suivant toutes sortes de directions, etc. Les neutoniens répondaient modestement : Notre philosophie ne va pas aussi loin que vous le désirez; nous n'avons pas assisté à la formation de l'univers, et nous ne connaissons pas l'ordre qui a dirigé sa constitution primitive; nous nous bornons à expliquer, par un même moyen, les phénomènes semblables et bien connus; les autres phénomènes ont aussi sans doute leurs lois particulières, que la postérité découvrira peut-être un jour, si toutefois cette découverte n'est pas réservée à des intelligences supérieures à celle de l'homme; contentez-vous, pour le présent, de ce que nous vous offrons.

II.

Les cartésiens se présentaient avec des promesses bien plus imposantes, et on les écouta pendant long-temps. Conduits par l'imagination plus que par les principes rigoureux de la géométrie, et s'étant réservé le droit de faire prendre toutes les formes, toutes les directions qu'ils voulaient, à leur matière subtile et à leurs tourbillons, ils prétendaient être en état d'expliquer tous les Promesses des cartésiens.

phénomènes de la nature, présens ou futurs. L'académie de Paris demeura long-temps attachée à ce système qu'elle avait adopté dans son établissement, comme une espèce de philosophie nationale.

Ceux qui voudront bien réfléchir que tous les corps se font un point d'honneur de marcher à pas mesurés, et qu'ils n'admettent les nouveautés que lorsqu'elles ont reçu en quelque sorte de la voix publique la sanction de la vérité, ne seront pas surpris que notre académie n'ait abandonné le cartésianisme pour le neutonianisme, qu'après s'être bien assurée que la géométrie et la mécanique le commandaient impérieusement.

Avant d'en venir là, cette savante compagnie mit les tourbillons aux plus fortes épreuves. Elle proposa pour sujet du prix de l'année 1728, l'*explication physique de la cause générale de la pesanteur*. Bulfinger, qui remporta ce prix, donna pour la cause qu'on demandait la résultante de l'action de deux tourbillons qui se croisaient perpendiculairement. Quelques raisonnemens spécieux lui valurent cet honneur; mais, en examinant la chose de près, on ne tarda pas de reconnaître que les mouvemens des deux tourbillons étaient incompatibles, et que d'ailleurs, quand même ils auraient pu avoir lieu à la fois, la résultante de leur action ne pouvait pas pousser les corps au cen-

tre commun des deux tourbillons, ou au centre de la terre.

Le sujet du prix de 1730 fut d'*expliquer pourquoi la figure des orbites des planètes est elliptique, et pourquoi le grand axe de ces ellipses change de position, ou répond successivement à différens points du ciel.* Jean Bernoulli, qui obtint le prix, traita ce sujet suivant les principes de Descartes, avec une grande sagacité et une profonde géométrie; il répondit d'une manière plausible à quelques fortes objections de Neuton contre les tourbillons; mais tous ses efforts ne pouvaient pas soutenir un édifice qui croulait de toutes parts.

On proposa pour sujet du prix de 1732, et ensuite de 1734, de *déterminer quelle est la cause physique des inclinaisons des orbites des planètes par rapport au plan de l'équateur de la révolution du soleil autour de son axe, et d'où vient que les inclinaisons de ces orbites sont différentes.* Le prix fut partagé entre Jean Bernoulli et son fils Daniel.

Selon Jean Bernoulli, la gravitation des planètes vers le centre du soleil, et la pesanteur des corps terrestres vers le centre de notre globe, n'ont pour cause ni l'attraction neutonienne, ni la force centrifuge du tourbillon cartésien, mais l'impulsion immédiate d'une grande quantité de matière

fluide, qui se précipitant sans cesse, en forme de torrent, de toute la circonférence du tourbillon vers le centre, imprime à tous les corps qu'elle rencontre, une tendance vers ce même point. Le développement de ces idées générales forme l'objet d'une *nouvelle physique céleste*, que l'auteur étaye de toutes les raisons que le génie et le savoir peuvent fournir; mais ce nouveau système est sujet à peu près aux mêmes difficultés que les tourbillons cartésiens.

Daniel Bernoulli, sans rien prononcer sur la cause générale de la pesanteur, fait deux suppositions, savoir, 1.° qu'il existe une force générale tendante au soleil; 2.° que le soleil est environné d'une atmosphère qu'il entraîne par son mouvement de rotation autour de son axe. En vertu de cette double cause, les planètes, lancées d'abord comme on voudra, ont dû prendre des routes qui s'approchassent continuellement du plan de l'équateur solaire. Les orbites planétaires pouvaient d'abord être fort éloignées de ce plan; mais cet éloignement a diminué par degrés pendant une longue suite de siècles; il diminue encore, et toutes les planètes finiront par tourner dans un même plan, ou dans des plans parallèles. L'auteur appuie ces idées sur des calculs ingénieux; mais toujours systématiques, par le vice même du sujet.

L'académie, convaincue par toutes ces tentatives

infructueuses, que le mouvement des planètes, et la pesanteur des corps terrestres, étaient inexplicables par l'action immédiate d'aucun fluide, cessa dès-lors de proposer de semblables questions aux recherches des savans : elle y substitua des sujets traitables par la géométrie et les observations, et véritablement utiles au progrès des sciences. La pièce de Cavaleri sur le flux et reflux de la mer, dont j'ai parlé, ne doit pas être regardée comme une infraction à cette règle, par les raisons que j'ai exposées.

Je passe sous silence quelques autres ouvrages qui parurent encore en ce temps-là, en faveur du cartésianisme. Le plus considérable est la physique de Privat de Molières, publiée en 1734 et années suivantes; elle contient des choses ingénieuses et vraies, mais attachées à un système insoutenable, et aujourd'hui entièrement abandonné.

III.

Pendant qu'on flottait encore entre les tourbillons cartésiens et l'attraction neutonienne, Jean Bernoulli fit une découverte qui répondait à une des questions incidentes que l'on avait d'abord faites aux neutoniens. Il expliqua, par une seule et même cause tirée des lois de la mécanique, le mouvement de translation des planètes autour du soleil, et le mouvement de rotation autour de leurs axes, (Joh. Bern. Op. t. IV, p. 285.)

que l'on connaît à quelques-unes. Ayant observé que ces deux sortes de mouvemens se faisaient à peu près dans un même plan, d'occident en orient, il eut l'idée heureuse, qu'ils avaient été produits par une même force, dont la direction ne passait pas par le centre de gravité de la planète. J'ai suffisamment parlé de cette propriété, en général, dans le chapitre de la mécanique. Il me reste à dire ici que Jean Bernoulli, en appliquant cette théorie à la terre, à Mars et à Jupiter, regardés comme des corps homogènes, a trouvé qu'à partir du centre de la planète, la direction de la force impulsive a dû passer, pour la terre, à la cent cinquantième partie du rayon; pour Mars, à la quatre cent dix-huitième partie du rayon; et pour Jupiter, aux sept dix-neuvièmes parties du rayon.

Observons encore que les deux mouvemens, de translation et de rotation, quoique produits par une même cause, pour chaque planète, ne suivent pas la même loi dans les trois planètes proposées. Car Jupiter, qui tourne plus lentement que la terre et Mars, autour du soleil, a un mouvement de rotation plus rapide que ceux de la terre et de Mars. Les rotations de Mars et de la terre se font à peu près dans le même temps, quoique le temps de la révolution de Mars autour du soleil soit presque double du temps de la révolution de la terre.

Je n'aurai plus occasion de parler de Jean Ber-

noulli, et je ne puis le quitter sans lui rendre un nouvel hommage. S'il a payé le tribut à l'humanité par quelques faiblesses, la gloire les a effacées; la postérité ne voit plus en lui que l'homme de génie et le digne rival de son frère Jacques Bernoulli. Tous deux ont été des géomètres du premier ordre; tous deux ont eu une grande part à l'invention de l'analyse infinitésimale, par la manière dont ils la saisirent, et les progrès immenses qu'ils lui firent faire, aussitôt que Leibnitz en eut jeté les fondemens; mais ils diffèrent en quelques points qu'il ne sera pas inutile de remarquer.

Parallèle des deux frères Bernoulli.

L'étendue, la force et la profondeur caractérisent le génie de Jacques Bernoulli : on trouve dans son frère plus de cette flexibilité et de cet esprit qui se porte indifféremment vers tous les objets. Le premier a donné plusieurs ouvrages vraiment originaux, et qui n'appartiennent qu'à lui seul : tels sont la théorie des *spirales*; le problème de la courbe *élastique*; celui des *isopérimètres*, qui occupe une place si considérable dans l'histoire de la géométrie; la première idée du principe pour réduire les problèmes de dynamique aux lois de l'équilibre; le traité *de Arte conjectandi*, combinaison neuve et profonde du calcul et d'idées métaphysiques. Le second saisissait dans toutes les parties des mathématiques, des questions détournées et curieuses; il avait un art tout particulier de

proposer et de résoudre de nouveaux problèmes; quelque sujet que l'on présentât à ses recherches, il y entrait très-promptement, et il n'en a jamais traité aucun, sans le montrer sous le jour le plus lumineux, et sans y faire quelque découverte importante. Enfin, Jacques Bernoulli s'est formé tout seul, et il est mort à l'âge de cinquante ans; Jean Bernoulli a été initié aux mathématiques par son frère, et il a vécu quatre-vingts ans; en quoi il a eu un avantage immense, pour tirer tout le parti possible de son génie; car, d'un côté, les commencemens de sa carrière savante ayant été aplanis par un grand maître, il s'est trouvé de très-bonne heure au courant des plus profondes spéculations; de l'autre, une longue vie, toujours employée à l'étude et à la méditation, n'a pu manquer d'étendre considérablement la sphère de ses idées. Il n'en est pas des mathématiques comme de la poésie et de l'éloquence. Celles-ci demandent principalement une imagination vive et féconde, apanage ordinaire de la jeunesse; dans les sciences exactes, pour lesquelles il faut que l'intelligence et l'étude se réunissent, si à mesure qu'on avance en âge la pointe de l'esprit s'émousse, cet inconvénient est quelquefois plus que compensé par la masse des connaissances acquises, et une longue habitude des méthodes géométriques, qui apprend à réduire une question à ses plus simples

termes, et ensuite à la résoudre par les moyens les plus prompts et les plus faciles. Le savoir peut même suppléer en certains cas au génie. Toutes ces considérations doivent être pesées, pour tenir exactement la balance entre les deux frères. Il me semble que Jacques Bernoulli peut être comparé à Neuton, et Jean à Leibnitz.

SECTION VI.

Introduction à la théorie des perturbations des corps célestes. Application aux mouvemens de Saturne et de Jupiter.

I.

Tous les philosophes ont admis un centre du monde, c'est-à-dire un point autour duquel se font toutes les révolutions des corps célestes. Les anciens (sauf quelques exceptions), le plaçaient au centre de la terre qu'ils regardaient comme immobile, tandis que le soleil et les autres corps célestes tournaient autour d'elle. Depuis Copernic, il n'est plus permis de douter que la terre tourne autour du soleil, ainsi que Mercure, Vénus, Mars, etc. Les étoiles sont vraisemblablement elles-mêmes des soleils qui ont leurs planètes. Tous

Centre du monde.

ces corps, en s'attirant mutuellement en raison composée de la masse et du carré inverse de la distance, ont des mouvemens particuliers autour du centre de gravité commun de tous les systèmes. Or, il peut arriver que ce centre de gravité se meuve, ou qu'il demeure en repos. Il y a une infinité de combinaisons pour le premier cas; il y en a une pour le second : le centre de gravité demeurera immobile, si tous les mouvemens particuliers autour de ce point sont réductibles (ce qui est possible) aux mouvemens de deux corps qui décriraient, dans le même temps, en sens contraires, deux lignes droites parallèles, réciproquement proportionnelles aux masses de ces deux corps : car il est démontré dans la mécanique qu'alors le centre de gravité commun de ces deux mêmes corps ne change pas de place. Du reste, cette question n'est ici que de pure curiosité : elle est inutile à examiner dans l'astronomie, où l'on considère seulement les mouvemens des corps célestes les uns par rapport aux autres, sans s'embarrasser de l'état du centre commun de gravité. L'opinion de Neuton est que ce point demeure en repos.

II.

Théorie générale des perturbations célestes.

S'il n'y avait dans le ciel que deux corps tournant l'un autour de l'autre, en vertu d'un mouvement d'impulsion primitive, et de l'attraction neu-

tonienne toujours agissante, ils décriraient des ellipses l'un autour de l'autre, et autour de leur centre commun de gravité, et ils observeraient rigoureusement les lois de Képler. Mais le mouvement elliptique de chaque planète principale autour du soleil, ou d'un satellite autour de sa planète centrale, est continuellement altéré par les attractions des autres astres, et les lois de Képler n'ont lieu que par approximation.

La détermination du mouvement elliptique de deux corps célestes n'a aucune difficulté; mais aussitôt qu'il y a plus de deux corps, le problème change entièrement de nature; les mouvemens deviennent très-compliqués, et on ne peut en trouver la nature que d'une manière approchée, souvent très-pénible, et pouvant même laisser quelquefois des doutes si certains résultats ont une exactitude suffisante. Il y a heureusement dans notre monde planétaire une circonstance qui abrége beaucoup les calculs; et en poussant très-loin les approximations, on peut éviter toutes les erreurs sensibles. Les planètes décrivent à peu près des ellipses, comme s'il n'y avait que deux corps qui s'attirassent mutuellement; de sorte que les forces perturbatrices comparées à la force principale qui pousse une planète vers le soleil, ou un satellite vers sa planète centrale, sont exprimées par de petites fractions qui permettent les approxi-

mations dont je viens de parler. De plus, il suffit, en plusieurs occasions, de ne faire entrer dans le calcul, au moins pour une première approximation, que les attractions de trois corps, les autres attractions pouvant être négligées à cause de leur extrême petitesse. Par exemple, dans les mouvemens de Saturne et de Jupiter autour du soleil, on ne considère que les attractions mutuelles du soleil, de Saturne et de Jupiter; dans le mouvement de la lune autour de la terre, on n'a égard qu'aux attractions mutuelles de la terre, de la lune et du soleil, etc. De là, les premiers géomètres qui, depuis Neuton, se sont occupés du problème des perturbations célestes, l'ont appelé, surtout en France, *le problème des trois corps.* Il s'énonce ainsi en général : *Trois corps qui s'attirent mutuellement en raison composée de la masse et du carré inverse de la distance, étant lancés dans l'espace, déterminer les courbes qu'ils décrivent, et toutes les circonstances de leurs mouvemens.*

III.

Application aux mouvemens de Saturne et de Jupiter.

Un des premiers problèmes de cette nature, qu'on ait résolu, est celui des perturbations de Saturne et de Jupiter. Suivant les calculs de Neuton, la plus forte action de Jupiter sur Saturne est à la tendance de Saturne vers le soleil, comme 1 est à

211 environ; et la plus forte action de Saturne sur Jupiter est à la tendance de Jupiter vers le soleil, comme 1 est à 2110 à peu près. D'où l'on voit que Jupiter et Saturne, principalement Saturne, éprouvent, par leurs attractions mutuelles, des altérations sensibles dans leurs mouvemens autour du soleil, et que ces altérations ne doivent pas être négligées.

En 1746, notre académie proposa pour sujet du prix de 1748, de déterminer ces perturbations, d'une manière plus précise que Neuton n'avait pu le faire par les méthodes de son temps. Euler remporta le prix : sa pièce fut remisé au secrétariat de l'académie, au mois d'août 1747 ; cette date est à remarquer.

Comme le calcul analytique est de même nature pour les dérangemens de Saturne et de Jupiter, et qu'il n'y a de différence que dans les coefficiens numériques, Euler s'est contenté de traiter les dérangemens de Saturne, comme étant les plus considérables.

Dans cette recherche, il suppose que le mouvement de Jupiter est exactement conforme aux lois deKépler, ou que les dérangemens particuliers de Jupiter n'ont pas d'influence sur ceux de Saturne ; ce qui revient à négliger des quantités qu'on regarde comme des infiniment petits du second ordre. Il commence par former en général les équa-

termine successivement les inégalités qu'il faut découvrir; et par ce moyen l'auteur arrive à des formules plus simples, plus évidentes, et plus facilement comparables aux résultats des observations. Il n'a rien ajouté à ses premières recherches sur les inégalités qui ont lieu dans la ligne des nœuds, dans l'inclinaison mutuelle des orbites de Saturne et de Jupiter, cette partie de la question lui ayant paru suffisamment éclaircie dans la pièce de 1748.

Quant aux temps des révolutions des deux planètes autour du soleil, l'auteur trouve qu'ils sont sujets l'un et l'autre à une inégalité qui est la même en quantité et en direction pour Saturne et Jupiter. Selon ses nouveaux calculs, les mouvemens moyens de ces deux planètes s'accélèrent, ou les temps de leurs révolutions diminuent. Cette variation est telle que, par exemple, à la longitude moyenne de Saturne, ou à celle de Jupiter, pour l'année 1700, il faut ajouter 2 minutes 23 secondes, pour avoir la longitude moyenne pour l'année 1800. Mais cet effet produit par les attractions mutuelles de Jupiter et de Saturne, n'est pas du genre des équations séculaires proprement dites, qui vont toujours dans le même sens : il dépend d'un angle qui change de signe dans l'espace de 150 siècles ; et par conséquent la variation du mouvement moyen passe aussi de même du posi-

tif au négatif, ou du négatif au positif. Je rapporte les résultats d'Euler; mais je dois ajouter qu'ils ne paraissent guère s'accorder avec les observations, et qu'ils sont encore plus contraires à ceux des calculs plus modernes, où l'on a poussé plus loin qu'Euler n'avait fait, les approximations des formules analytiques.

SECTION VII.

Théorie de la Lune.

L'ELLIPSE que la lune décrirait autour de la terre, si ces deux corps existaient seuls dans l'univers, est sensiblement altérée par l'action du soleil, et les géomètres se sont attachés à déterminer ces altérations.

I.

Neuton substitue à la force par laquelle le soleil attire la lune deux autres forces, l'une parallèle à l'action du soleil sur la terre, l'autre située dans le plan de l'écliptique; et en combinant ces deux forces perturbatrices avec la force principale, ou la tendance de la lune vers la terre, il calcule par approximation les mouvemens de la lune. Théorie de Neuton.

Les inégalités qu'il a cherché à expliquer avec

un certain détail sont : 1.° La *variation*, qui monte à 35 minutes dans les octans; 2.° le mouvement rétrograde des nœuds de l'orbite lunaire, dont la quantité est d'environ 19 degrés par an; 3.° la principale *équation* en inégalité de ce mouvement, laquelle monte à un degré 20 minutes; 4.° la variation de l'inclinaison de l'orbite lunaire au plan de l'écliptique : variation qui est d'environ 8 à 9 minutes, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre. Le mouvement de la lune est encore sujet à d'autres inégalités : telles sont celle qui dépend de l'équation au centre du soleil; celle qui dépend de la distance du soleil au nœud de la lune; l'équation annuelle du mouvement des nœuds de la lune; le mouvement de l'apogée, et l'équation considérable de ce mouvement; la variation de l'excentricité de l'orbite lunaire, etc. Neuton a calculé quelques-unes de ces inégalités par la théorie, en s'appuyant sur certaines propositions un peu hypothétiques; il s'est contenté d'établir les autres sur les simples observations. En général ses méthodes d'approximation ne sont pas suffisantes; et quoiqu'elles montrent un grand effort de génie, les géomètres postérieurs ont rendu un service considérable à l'astronomie physique, en les perfectionnant, ou plutôt en les remplaçant par d'autres méthodes beaucoup plus exactes.

II.

Théorie des géomètres modernes.

Pendant qu'Euler était occupé de ses recherches sur les mouvemens de Saturne et de Jupiter, il appliquoit aussi ses méthodes au mouvement de la lune, qui est un problème du même genre. De leur côté, Clairaut et d'Alembert traitaient ce dernier problème par des méthodes qui leur étaient propres, et sans se rien communiquer. Les solutions des deux géomètres français furent publiées en 1749, dans le volume de l'académie pour l'année 1745; celle d'Euler le fut en 1753, dans un ouvrage intitulé : *Theoria motûs lunœ*. Je vais suivre dans mon récit l'ordre des temps où ces théories ont paru.

Clairaut considère la lune comme soumise à l'action de quatre forces, dont la première et la *principale* est sa tendance vers la terre; les trois autres sont des forces *perturbatrices* qui proviennent de l'attraction du soleil. De ces trois dernières forces, la première, située dans le plan de l'orbite lunaire que l'auteur considère alors comme fixe, est dirigée suivant le rayon vecteur mené de la lune à la terre; et s'ajoute à la force principale; la seconde, aussi située dans le plan de l'orbite lunaire, agit perpendiculairement à l'extrémité du rayon vecteur; et enfin la troisième est parallèle à la ligne qui joint le soleil et la terre.

La force principale et les deux premières forces perturbatrices font décrire à la lune à peu près une ellipse dont le grand axe ou la ligne des absides tourne suivant l'ordre des signes : la question est d'abord de déterminer la nature de cette courbe, et le temps que la lune met à en parcourir un arc quelconque, à compter d'une ligne fixe dans le ciel. Clairaut forme deux équations différentielles du second ordre, dont les intégrales, en termes finis, remplissent les deux objets qui viennent d'être indiqués. Ces intégrales ont l'inconvénient de contenir encore des termes affectés de signes *sommatoires ;* mais comme ces termes proviennent des forces perturbatrices qui sont fort petites en comparaison de la force principale, Clairaut fait disparaître ces signes, en négligeant les quantités qu'on peut regarder comme des infiniment petits du second ordre. Par une suite de calculs analogues aux règles de fausses positions que les astronomes emploient pour corriger successivement diverses quantités dans la réduction de leurs observations, notre auteur parvient de proche en proche à des valeurs très-approchées et suffisantes, tant du rayon vecteur que du temps. Il trouve donc ainsi le lieu de la lune dans son orbite : ensuite il réduit, par les moyens connus, ce lieu au plan de l'écliptique, ce qui donne la longitude de la lune.

Il reste à indiquer l'effet de la troisième force

perturbatrice, c'est-à-dire, de la force parallèle à la ligne qui joint le soleil et la terre. Cette force tend à imprimer un mouvement rétrograde à la ligne des nœuds, et à faire varier l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique. Clairaut donne les formules qui expriment ces mouvemens. De là résulte la détermination de la latitude de la lune. En combinant la latitude avec la longitude, on a finalement le lieu de la lune dans le ciel, pour un instant quelconque; ce qui était l'objet final du problème des mouvemens de la lune.

Dans ces nombreux et difficiles calculs des inégalités de la lune, Clairaut s'était d'abord mépris sur la quantité du mouvement de l'apogée : il ne l'avait trouvée, par la théorie, qu'environ la moitié de ce qu'elle est réellement suivant les observations. Ce résultat, dont il se croyait bien sûr, et qu'il se hâta d'annoncer dans l'assemblée publique de l'académie des sciences, du 14 novembre 1747, affligea beaucoup les neutoniens, et réjouit d'autant les cartésiens. Aussitôt ces derniers en firent retentir tous les journaux : ils espéraient que le système neutonien, convaincu de faux dans un point essentiel, croulerait tout entier à un nouvel examen. Mais leur triomphe ne fut pas de longue durée. Clairaut ayant revu ses calculs avec sévérité, s'aperçut qu'il n'avait pas poussé assez loin l'approximation de la série qui

devait donner le mouvement de l'apogée; il corrigea donc son erreur, et il trouva la totalité de ce mouvement, sans rien ajouter ni rien changer à la loi de la théorie neutonienne. Il rétracta publiquement et avec franchise son assertion précipitée. Alors l'attraction fut rétablie avec honneur dans les espaces célestes, d'où les cartésiens avaient cru un moment la voir bannir.

Du reste, l'erreur de Clairaut était d'autant plus subtile et plus pardonnable, que d'Alembert et Euler y avaient été aussi conduits par leurs méthodes. Tous se corrigèrent à peu près dans le même temps.

L'académie de Pétersbourg ayant proposé la théorie de la lune pour sujet d'un prix, pour l'année 1752, Clairaut envoya au concours une pièce qui fut couronnée et imprimée la même année à Pétersbourg. Il y avait joint des *tables*, qui se trouvèrent un peu défectueuses, soit par quelques erreurs dans les formules analytiques, soit par l'inexactitude des observations qui leur servaient de base. En 1765, Clairaut donna, peu de temps avant sa mort, une nouvelle édition de cet ouvrage avec des additions théoriques, et de nouvelles tables, que les astronomes estiment beaucoup.

D'Alembert. D'Alembert publia, en 1754, tout le détail de sa théorie de la lune, et plusieurs autres recherches du même genre, dans un ouvrage intitulé :

Recherches sur plusieurs points importans du système du monde.

La méthode que Clairaut a suivie de considérer le mouvement de la lune dans son orbite *réelle*, demande ensuite qu'on le réduise à l'écliptique. D'Alembert évite ce détour, en projetant tout d'un coup l'orbite de la lune sur le plan de l'écliptique. Il détermine donc les forces que la terre et le soleil exercent pour faire décrire cette orbite *fictive*; et il parvient très-promptement à une équation différentielle du second ordre entre le rayon vecteur *fictif*, et l'angle que ce rayon fait avec une ligne donnée de position sur l'écliptique. A cette équation est liée l'expression du temps. L'auteur forme ensuite l'équation du mouvement des nœuds de la lune, et celle du changement de l'inclinaison de l'orbite réelle, par rapport à l'écliptique. Il intègre ses formules par des méthodes ingénieuses et nouvelles; de sorte qu'il enrichit la géométrie en même temps qu'il traite son sujet.

Il avait accompagné cette théorie de *tables*, qui furent trouvées imparfaites. Les corrections qu'il y fit, et qu'il publia en 1761, dans le premier volume de ses *Opuscules mathématiques*, ne remplirent pas encore le vœu des astronomes. Son goût, un peu trop exclusif pour l'analyse pure, ne lui permettait pas de se livrer, avec la patience nécessaire, aux applications numériques, sans lesquel-

les néanmoins l'astronomie ne peut tirer aucun secours des formules de l'algèbre. Peut-être faut-il aussi attribuer en partie le défaut de ses tables aux observations qui en formaient les *données*.

De même que le soleil trouble l'orbite de la lune autour de la terre, la lune trouble à son tour l'orbite de la terre autour du soleil. Les planètes principales troublent réciproquement leurs mouvemens autour du soleil, comme on l'a vu pour Jupiter et Saturne. D'Alembert a examiné les principaux effets de toutes ces perturbations; mais en général il se contente de donner des formules analytiques, dans lesquelles même les calculs ne sont le plus souvent qu'indiqués, de sorte que les astronomes n'en peuvent retirer aucun secours.

Euler. Dans l'ouvrage *Theoria motûs lunæ*, que j'ai cité, Euler rapporte le mouvement de la lune autour de la terre à trois axes perpendiculaires entre eux, qui se croisent au centre de la lune, et sont emportés avec elle autour de la terre, en conservant toujours leurs parallélismes respectifs. Il réduit donc toutes les forces, tant de la terre que du soleil, qui agissent sur la lune, à trois sortes de forces parallèles aux trois axes proposés. Cette manière de former les équations du problème est très-simple, et ne présente d'abord aucune difficulté; mais quand on veut ensuite appliquer les expressions analytiques à l'astronomie, où l'on ne

considère principalement que des mouvemens angulaires, on est conduit à des formules d'une extrême complication. Pour les simplifier et les amener à son but, Euler avait besoin de toute sa profonde science du calcul. Il parvint en effet de cette manière à déterminer la longitude et la latitude de la lune, c'est-à-dire la véritable position de cette planète dans le ciel, avec une exactitude à peu près égale à celle que Clairaut et d'Alembert avaient trouvée par d'autres méthodes très-différentes.

D'après cette théorie d'Euler, et quelques observations choisies, Tobie Mayer, astronome de Gottingue, construisit des *tables* lunaires, qui eurent d'abord beaucoup de succès; mais on connut, par l'usage un peu répété, qu'elles étaient défectueuses en plusieurs points. L'auteur les corrigea, et donna, en 1759, une nouvelle édition, ou plutôt de nouvelles tables, dont les astronomes font le plus grand cas.

T. MAYER, né en 1720, mort en 1760.

Comme dans les problèmes d'approximation on n'arrive presque jamais du premier coup aux formules les plus simples et les plus exactes, Euler remarqua lui-même des inconvéniens dans son premier essai; et ayant repris ce sujet par les fondemens, il donna, en 1772, un nouvel ouvrage intitulé : *Theoria motuum lunæ, nová methodo pertractata.* Il suit toujours le système de rapporter le

mouvement de la lune à trois coordonnées perpendiculaires ; mais il les choisit ici de telle manière, que les intégrales dépendent de séries qui convergent rapidement. Le centre de la terre est l'origine commune des trois axes ; la première coordonnée tombe sur la ligne menée par la terre, dans le plan de l'écliptique, suivant une direction *variable*, qui répond pour chaque instant à la longitude moyenne de la lune ; la seconde, située aussi dans le plan de l'écliptique, est perpendiculaire à la première, et va se terminer à la troisième, qui est la perpendiculaire abaissée de la lune sur le plan de l'écliptique. On voit que le système de ces trois coordonnées change continuellement de place, à mesure que la lune chemine dans son orbite ; mais il conserve toujours la même figure.

Après avoir établi les trois équations du mouvement de la lune, Euler porte sur la première coordonnée le rayon moyen de l'orbite lunaire, et il introduit la différence de ces deux lignes dans les formules : alors cette différence et les deux autres coordonnées sont toujours des quantités fort petites par rapport à un rayon quelconque de l'orbite lunaire ; ce qui produit des séries très-convergentes, et des abréviations considérables dans les calculs. Par les *données* que l'auteur emploie, et par les transformations qu'il fait subir aux expressions analytiques, il distribue les inégalités de la lune en

différentes classes, qui, étant traitées séparément, font qu'on n'a pas à craindre que les erreurs commises dans une partie affectent les autres. Euler finit par des *tables* lunaires, où le nombre des *équations* est moindre que dans toutes les tables connues auparavant : elles ont la réputation d'être fort exactes.

Ce grand homme était presqu'aveugle, lorsqu'il entreprit cet immense travail. Trois de ses plus illustres disciples, Jean-Albert son fils, Louis Krafft et Jean Lexel, exécutaient les opérations de calcul qu'il indiquait : dévouement qui honore leur âme, et qui, joint aux excellens ouvrages par lesquels ils se sont d'ailleurs rendus célèbres, consacrera leurs noms à l'estime et à la reconnaissance de la postérité.

SECTION VIII.

Précession des équinoxes : libration de la lune.

JE quitte un moment les perturbations que les corps célestes se causent mutuellement, pour parler du problème de la précession des équinoxes, déjà ébauché par Neuton, et que d'Alembert résolut beaucoup plus exactement en 1749, c'est-à-dire dans le temps où l'on était le plus occupé des

mouvemens de la lune : j'y joindrai celui de la libration de la lune, qui est de la même nature, quoiqu'il ne soit venu que long-temps après.

I.

Précession des équinoxes.

La terre étant un sphéroïde elliptique aplati vers les pôles, il résulte de cette figure que son axe doit prendre un certain mouvement par rapport au plan de l'écliptique, en vertu des attractions que la lune et le soleil exercent sur les parties du sphéroïde. Les autres planètes ont aussi quelque part à ce mouvement; mais elle est si petite, qu'elle peut être négligée. Je commence avec Neuton, par considérer l'action du soleil.

Neuton.

Imaginons un plan qui passe par l'axe de l'écliptique, et par le centre de la terre dans toutes les positions où cette planète se trouve par son mouvement autour du soleil : il est évident que ce plan partage le sphéroïde terrestre en deux parties égales et semblables, mais posées en sens contraires, excepté le cas où l'axe de la terre se trouve accidentellement dans le plan sécant, car alors les deux parties égales du sphéroïde terrestre sont placées de la même manière par rapport au soleil. Mais en général l'action du soleil n'est pas la même sur les deux parties, et par conséquent elle doit faire varier la position de l'axe terrestre par rapport au plan de l'écliptique.

Pour déterminer ce mouvement, Neuton considère le sphéroïde terrestre comme l'assemblage d'une sphère qui a pour diamètre l'axe de rotation ou de figure de ce sphéroïde, et d'une enveloppe extérieure, dont l'épaisseur va en diminuant depuis l'équateur jusqu'aux poles; il suppose que cette enveloppe, ou espèce de croûte, soit resserrée et ne forme qu'un anneau très-mince et très-dense, placé dans le plan de l'équateur; ensuite, faisant abstraction de la sphère inscrite, il imagine que les molécules dont l'anneau est composé, sont autant de petites lunes adhérentes entr'elles, et qui, étant entraînées par le mouvement diurne de tous les points de l'équateur, tournent comme lui autour de l'axe de la terre, en se tenant éloignées du centre, d'une quantité égale au demi-diamètre de l'équateur; il calcule les forces qui font mouvoir les nœuds de ces petites lunes, ou les points d'intersection de l'anneau avec l'écliptique; il trouve que ce mouvement est rétrograde, et qu'il devrait monter à 45 minutes environ dans l'espace d'un an. Mais cette quantité est considérablement diminuée par diverses causes que Neuton discute, et que nous ne pouvons pas faire connaître ici. Le résultat est que, toutes réductions faites, le mouvement rétrograde des points équinoxiaux, produit par la seule action du soleil, doit être d'environ 10 secondes en un an.

Neuton n'a pas calculé immédiatement l'effet de l'attraction de la lune : il le tire de la théorie des marées. Ayant trouvé par sa méthode que l'action de la lune sur les eaux de la mer est quadruple de celle du soleil, et supposant que ce rapport a également lieu ici, il conclut que par les actions réunies du soleil et de la lune, la rétrogradation moyenne des points équinoxiaux doit être d'environ 50 secondes en un an ; ce qui est à peu près conforme aux observations.

Malgré cette conformité, la solution de Neuton est fondée sur des hypothèses un peu trop libres. De plus, il n'a connu que d'une manière vague et insuffisante le mouvement de nutation de l'axe terrestre, qui se combine avec le mouvement de précession.

D'Alembert. La méthode de d'Alembert est beaucoup plus directe et plus exacte. Il détermine les effets des attractions du soleil et de la lune sur la croûte ou double menisque, que forme l'excès du sphéroïde terrestre sur la sphère inscrite, sans recourir à la réduction précaire de cette croûte en un anneau équatorial. De ces attractions, il déduit trois forces, dont deux sont parallèles au plan de l'écliptique, sans l'être entr'elles, et la troisième est perpendiculaire à ce plan. Ces trois forces peuvent être considérées comme faisant équilibre, à chaque instant, à trois forces contraires qui provien-

nent de l'inertie des particules du sphéroïde terrestre. La question est donc de trouver les conditions de cet équilibre. D'Alembert y parvient, au moyen d'un grand nombre de propositions générales, et alors nouvelles, sur les lois de l'équilibre entre des forces qui n'agissent pas dans un même plan, ni suivant des lignes parallèles. De là venant au cas particulier de son problème, il transforme ses expressions générales en deux équations différentielles du second ordre, dont les intégrales, en termes finis, représentent, 1.° le mouvement de la *précession,* ou le mouvement conique, toujours croissant, de l'axe terrestre autour des pôles de l'écliptique, d'orient en occident, et qui est à peu près de 50 secondes de degrés par an. 2.° Le mouvement de *nutation,* ou le balancement alternatif de l'axe terrestre sur le plan de l'écliptique, qui monte à 18 secondes de degré, dans l'espace de temps que les nœuds de la lune emploient à faire une révolution rétrograde, c'est-à-dire à peu près en 18 ans 7 mois.

En comparant la quantité *calculée* de la nutation avec la quantité observée, d'Alembert a trouvé que l'action lunaire est à l'action solaire, comme 7 est à 3 environ; d'où il résulte que la masse de la terre est environ 70 fois plus grande que celle de la lune; ce qui ne s'éloigne pas beaucoup

du rapport que Daniel Bernoulli avait conclu du phénomène des marées.

Quoique d'Alembert eût surmonté les principales difficultés attachées à ce grand problème, il y est encore revenu plusieurs fois, pour généraliser et perfectionner ses méthodes, soit en intégrant les équations différentielles avec plus de rigueur, soit en faisant quelques corrections aux coefficiens numériques, donnés par les observations. Il avait d'abord supposé que les méridiens de la terre sont des ellipses égales et semblables; dans la suite, il a aussi résolu le problème, dans l'hypothèse où les méridiens et les parallèles sont des ellipses; ce qui produit quelques différences qu'il ne serait pas permis de négliger, si en effet les observations menaient à conclure que la terre est un sphéroïde d'une pareille nature. Il discute aussi les conséquences qui résulteraient de la non sphéricité de la lune, et quelques autres points de toute cette théorie. Voyez divers endroits de ses *Opuscules mathématiques*, et les mémoires de l'académie des sciences de Paris, pour les années 1754 et 1768.

II.

Libration de la lune.

Tout le monde peut juger que la lune nous présente toujours la même face. Les observations exactes ont de plus fait connaître que cette planète a un mouvement *libratoire*, par lequel les

taches situées vers les bords de son disque paraissent et disparaissent en des temps réglés.

Dominique Cassini, et son fils Jacques Cassini, sont les premiers qui aient donné de ces mouvemens de la lune une explication complète, exacte et conforme aux observations, et adoptée en conséquence par tous les astronomes, sauf quelques modifications dont je parlerai bientôt : elle est exposée par Jacques Cassini, dans les mémoires de l'académie, pour l'année 1721, et dans ses *élémens* d'astronomie.

Selon cet auteur, la libration de la lune est produite par la combinaison du mouvement périodique de cette planète autour de la terre, avec un mouvement de rotation autour d'un axe, conformément aux conditions suivantes : 1.° l'axe de rotation de la lune est incliné de 87 degrés et demi sur le plan de l'écliptique, et de 82 degrés et demi sur le plan de l'orbite lunaire ; de sorte que le plan de l'équateur du globe de la lune fait un angle de 2 degrés et demi avec le plan de l'écliptique, et un angle de 7 degrés et demi avec le plan de l'orbite lunaire. 2.° Les pôles du globe de la lune sont placés sur la circonférence du grand cercle qui se forme en coupant à chaque instant ce globe par un plan parallèle au grand cercle céleste, qui passe par les pôles de l'écliptique et ceux de l'orbite lunaire. On peut appeler ce cercle le *colure de la lune*;

par la même raison qu'on appelle *colure des solstices* le grand cercle qui passe par les pôles de l'écliptique et par ceux du cercle équinoxial. 3.° Le globe de la lune tourne autour de son axe, suivant l'ordre des signes, ou d'occident en orient, dans l'espace de 27 jours 5 heures, par une période égale à celle du retour de la lune au nœud de son orbite avec l'écliptique. Ce mouvement est analogue à la révolution que la terre fait autour de son axe, suivant l'ordre des signes, retournant au même colure dans l'espace de 23 heures 56 minutes.

Il résulte en général de ces suppositions, que si l'on prolonge, par la pensée, l'axe du globe de la lune jusque dans le ciel, les extrémités de cet axe nous paraîtront décrire autour des pôles de l'écliptique, dont elles sont distantes de 2 degrés et demi, deux cercles polaires, d'orient en occident, en 18 ans 7 mois, dans le même temps et du même sens que les nœuds de la lune. On voit que ce mouvement est semblable à celui par lequel les pôles de la terre font leur révolution autour des pôles de l'écliptique, d'orient en occident, suivant deux cercles qui en sont éloignés de 23 degrés et demi, dans une période d'environ 25900 années.

Tobie Mayer a traité la même question dans un excellent mémoire allemand, imprimé à Nuremberg, en 1750. Il rapporte un grand nombre d'observations qu'il a faites aux années 1748 et 1749,

et d'où il a inféré que l'angle de l'axe lunaire avec l'axe de l'écliptique est seulement d'un degré trente minutes, ce qui diffère d'un degré de la détermination de Jacques Cassini. Il prétend que la même chose se trouve par des observations faites au temps de Dominique Cassini, et que sans doute Jacques Cassini n'a pas connues, puisqu'il n'en dit rien. Les autres hypothèses de ces astronomes sont les mêmes. Je possède une traduction française manuscrite du mémoire de Mayer. Venons à la théorie physique.

III.

L'académie des sciences de Paris proposa pour sujet du prix de 1764, cette question : *Si l'on peut expliquer, par quelque raison physique, pourquoi la lune nous présente toujours la même face? et comment on peut déterminer par les observations et par la théorie, si l'axe de cette planète a quelque mouvement propre, semblable à celui que l'on connaît dans l'axe de la terre, et qui produit la précession des équinoxes, et la nutation de l'axe de la terre?* M. Lagrange remporta ce prix. Théorie physique de la libration de la lune.

Par le mouvement de rotation, la lune est aplatie vers ses pôles; par l'attraction que ses parties éprouvent de la part de la terre, elle est allongée dans le sens du diamètre dirigé vers nous; et l'allonge-

ment est plus grand que l'aplatissement. D'où l'on voit que l'action de la terre doit imprimer quelque mouvement à l'axe lunaire. L'action du soleil y a bien aussi quelque part, mais elle est extrêmement petite, et peut être négligée.

D'Alembert avait donné, dans les mémoires de l'académie de Paris, pour l'année 1754, des formules générales pour déterminer les mouvemens de l'axe d'une planète, dont les méridiens et les parallèles sont des ellipses. Ces formules appliquées à la terre l'avaient conduit à des résultats exacts, et à peu près les mêmes que dans l'hypothèse où les parallèles sont des cercles, et les méridiens des ellipses; mais il s'était trompé, en appliquant de la même manière ces formules à la lune. Il n'avait pas fait attention que la vitesse de rotation de la lune autour de son axe étant 13 à 14 fois plus lente que la vitesse journalière de la terre, cette différence produisait des termes qui peuvent être négligés dans un cas, et non dans l'autre : *et vice versâ*.

M. Lagrange parvient d'abord aux mêmes équations générales que d'Alembert, par une heureuse combinaison du principe des vitesses virtuelles, avec celui que Jacques Bernoulli et d'Alembert avaient proposé pour les problèmes de dynamique; ensuite il applique ces formules avec justesse au mouvement de l'axe lunaire, et il explique très-

ingénieusement les phénomènes indiqués par le programme de l'académie.

La pièce de M. Lagrange, quoique très-belle et très-digne de la récompense qu'elle obtint, n'avait pas cependant épuisé la matière. L'auteur y revint Ac. de Berlin, 1780. dans un excellent mémoire, où il la traite d'une manière plus générale et plus complète, soit par des intégrations plus rigoureuses, soit, surtout, par l'explication exacte de l'accord observé des points équinoxiaux lunaires avec les nœuds de l'orbite de la lune. Cette explication est le résultat de l'intégration complète des deux équations différentielles qui donnent les mouvemens de l'axe lunaire; et l'auteur y parvient par une transformation heureuse des coordonnées. Dans le problème de la précession des équinoxes, la rapidité du mouvement de rotation de la terre fait que dans les équations différentielles relatives à l'axe de la terre, on peut négliger les termes différentiels du second ordre, et traiter ces équations comme n'étant que du premier ordre, ainsi que d'Alembert l'a fait; mais dans celui de la précession des points équinoxiaux lunaires, cette simplification n'est plus permise; et c'est faute d'avoir intégré complètement les équations dont il s'agit, qu'on n'avait pas encore pu rendre raison, par la théorie, de la coïncidence, ou plutôt de la libration des nœuds de l'équateur lunaire autour de ceux de l'orbite: phé-

nomène qu'on peut regarder comme un des plus singuliers du système du monde.

Parmi des questions incidentes que l'auteur examine, il en est une qui mérite surtout d'être remarquée : elle consiste à savoir si la figure non sphérique de la lune, en même temps qu'elle produit le mouvement de l'axe lunaire, n'a pas aussi quelqu'influence sur le mouvement de la lune autour de la terre; M. Lagrange a trouvé qu'en effet ce mouvement est un peu altéré par la même cause.

SECTION IX.

Inégalités du mouvement de la terre. Obliquité de l'écliptique. Mouvemens moyens des planètes.

I.

Inégalités du mouvement de la terre.

Les inégalités de Saturne et de Jupiter ne permettaient pas de douter que les autres planètes principales n'en éprouvassent aussi de semblables, puisque tous les corps d'un même système sont nécessairement soumis aux mêmes lois. Ainsi, le mouvement de la terre autour du soleil doit être altéré par les attractions des autres planètes : et comme la connaissance exacte de ce mouvement influe sur toutes les déterminations astronomiques, on s'est

appliqué à l'étendre et à la perfectionner. Dans cette vue, l'académie des sciences de Paris proposa pour sujet du prix de 1754, et ensuite de 1756, *la théorie des inégalités que les planètes peuvent causer au mouvement de la terre.* Euler remporta ce prix.

Si l'on considérait tout à la fois les différentes forces qui agissent sur la terre, le calcul deviendrait très-compliqué. Pour le simplifier, Euler combine successivement et séparément l'action du soleil avec les forces perturbatrices qui proviennent de Saturne, de Jupiter, de Mars, etc.; puis il ajoute ensemble tous ces effets. Il résulte en général de cette réunion, 1.° un petit mouvement dans l'aphélie de la terre, suivant l'ordre des signes; 2.° une altération dans la longitude du soleil ou de la terre; 3.° un changement apparent dans la latitude des étoiles fixes; 4.° une diminution dans l'obliquité de l'écliptique. Toutes ces quantités sont très-difficiles à déterminer avec précision. Euler trouve que la quantité moyenne du mouvement de l'aphélie est d'environ 12 secondes en un an; que la diminution moyenne de l'angle d'obliquité de l'écliptique est de 48 secondes par siècle; il laisse des incertitudes dans les autres.

On a vu que si une planète principale a au moins un satellite, la comparaison du mouvement elliptique de ce satellite, avec le mouvement elliptique

qu'elle a elle-même autour du soleil, fait connaître le rapport de la masse de la planète à celle du soleil. Ici on aurait une méthode générale pour trouver les masses de toutes les planètes, si les formules qui représentent les actions de ces planètes sur la terre, étaient assez simples, assez commodes, pour qu'en regardant les masses comme des *inconnues* ordinaires, on pût ensuite dégager ces inconnues avec une exactitude suffisante, par la comparaison de la théorie avec les observations. Mais ce moyen est un peu compliqué et sujet à incertitude. Euler en a néanmoins fait usage. Selon ses calculs, la masse de Mars est un peu moindre que celle de la terre, et la masse de Vénus en est environ la moitié. Par des calculs postérieurs du même auteur, la masse de Vénus est presque égale à celle de la terre.

Ac. de Péters. 1771.

II.

Euler n'avait pas fait entrer dans sa pièce de 1756, l'action de la lune sur la terre, soit parce qu'il supposait que l'académie n'avait eu en vue dans son programme, que l'action des planètes principales; soit parce que d'Alembert venait de traiter cette question dans le troisième volume de ses *Recherches sur le système du monde,* publié en 1754.

Clairaut lut à l'académie, en 1757, un mémoire

sur l'orbite apparente du soleil autour de la terre, en ayant égard aux perturbations produites par la lune et par les planètes principales. Ce mémoire, imprimé par anticipation dans le volume de l'académie pour 1754, est une nouvelle application de la méthode que l'auteur avait employée dans la théorie de la lune : il est très-clair et très-méthodique. Outre qu'il complète en quelque sorte la pièce d'Euler, en ce qui concerne l'action de la lune, Clairaut y démontre, d'une manière très-simple et très-élégante, deux séries qu'Euler avait énoncées dans sa première pièce sur les mouvemens de Saturne et de Jupiter, et dont il s'était réservé le secret.

III.

Lorsque d'Alembert publia ses recherches sur la précession des équinoxes, les astronomes et les géomètres doutaient encore si le plan de l'écliptique conserve toujours exactement la même position dans le ciel étoilé. D'un côté, les anciennes observations semblaient indiquer positivement une diminution dans l'obliquité de l'écliptique : en effet, Pithéas l'avait trouvée de 23 degrés 51 minutes; les Arabes la réduisirent à 23 degrés 35 minutes; Vlugh-Beigh la trouva de 23 degrés 30 minutes; au seizième siècle, on la fit de 23 degrés 29 minutes; aujourd'hui elle n'est plus que de 23

Obliquité de l'écliptique.

degrés 28 minutes ; de là plusieurs astronomes modernes, et entr'autres le chevalier de Louville, ont conclu que l'obliquité de l'écliptique va constamment en diminuant, et que la diminution est d'environ une minute par siècle. Mais d'autres astronomes, très-dignes d'être écoutés, entr'autres La Hire et Le Monnier, en s'appuyant sur leurs propres observations comparées avec d'autres qu'ils regardaient comme très-exactes, niaient formellement que l'obliquité de l'écliptique éprouvât aucun changement. D'Alembert embrassa cette dernière opinion, et en fit la base des formules qu'il donna pour calculer le lieu apparent des étoiles fixes. Mais la théorie neutonienne, appliquée immédiatement à ce problème, a prononcé d'une manière positive en faveur de la diminution de l'obliquité de l'écliptique ; d'où il résulte que les formules citées de d'Alembert avaient besoin de quelques corrections.

Euler avait traité succinctement cette question dans sa pièce de 1756 ; il l'a approfondie dans un mémoire particulier, imprimé parmi ceux de l'académie de Berlin pour l'année 1754. La conclusion de ses recherches est que l'obliquité diminue d'environ 49 secondes par siècle. Il donne en conséquence de nouvelles formules pour déterminer exactement les changemens de positions apparentes des étoiles.

IV.

Mouvemens moyens des planètes.

Il y avait dans la théorie des inégalités des planètes une question importante à examiner, surtout pour la terre ; savoir, si les mouvemens moyens ne sont pas sujets à quelques altérations, c'est-à-dire, si toutes les durées moyennes des révolutions planétaires, considérées à divers intervalles de temps, demeurent toujours exactement les mêmes. Notre académie proposa, en conséquence, pour sujet du prix de 1760, de déterminer *s'il y a de l'altération dans le mouvement moyen des planètes, et supposé qu'il y en ait, quelle en est la cause? Charles* Euler écrivit sous les yeux de son illustre père *Léonard* Euler, une pièce qui remporta le prix.

Pour résoudre immédiatement la question par les observations, il faudrait que les observations comparées fussent très-exactes et très-éloignées les unes des autres. Or, 1.° les anciennes observations sont si imparfaites, qu'en les comparant avec les modernes, elles ne donnent, sur le point dont il s'agit, que des résultats vagues, souvent même contraires les uns aux autres. 2.° Les observations modernes, supposées très-exactes, sont insuffisantes quant à la seconde condition. L'auteur de la pièce couronnée a donc cherché la solution du

problème dans le principe de l'attraction neutonienne.

Suivant la seconde loi de Képler, les carrés des temps des révolutions périodiques des planètes autour du soleil, sont entr'eux comme les cubes des grands axes des orbites elliptiques primitives et non altérées. Il résulte de cette loi, que si le grand axe d'une orbite planétaire vient à augmenter ou à diminuer d'une petite quantité proportionnelle au temps, la durée de la révolution augmentera ou diminuera d'une quantité proportionnelle au carré du temps. Si donc les moyens mouvemens sont sujets à des altérations, ces altérations se manifesteront principalement par les changemens qui pourront arriver aux grands axes des ellipses primitives. Or, le grand axe de l'orbite d'une planète ne peut varier que par les attractions des autres planètes. M. Euler s'est donc attaché à découvrir si ces forces perturbatrices pouvaient produire en effet des variations sensibles dans le grand axe. Il n'a point trouvé de telles variations; d'où il a conclu qu'à cet égard les mouvemens moyens des planètes demeurent inaltérables, au moins dans une longue suite de siècles; car il faut toujours se souvenir que ces problèmes n'étant résolus que par approximation, il est possible que les termes négligés, quelque petits qu'ils soient, produisent, après un

temps très-considérable, quelques changemens dans les résultats.

L'auteur a fait un autre essai de calcul : il a trouvé que l'action de la comète de Halley sur la terre, pouvait produire quelque trouble dans l'orbite terrestre; mais la quantité en est très-petite, et de plus s'exerce tantôt dans un sens, tantôt dans un autre; de sorte qu'on n'en peut rien conclure.

V.

L'académie voyant par cet ouvrage, d'ailleurs excellent, que le principe de l'attraction ne donnait pas de lumière absolument certaine sur les altérations des moyens mouvemens, et soupçonnant néanmoins toujours qu'il existait de telles altérations, au moins très-petites, pensa qu'on en trouverait peut-être la cause dans la résistance d'une matière éthérée, répandue de tous côtés dans les espaces célestes. Ainsi elle proposa, pour sujet du prix de 1762, la question, *si les planètes se meuvent dans un milieu dont la résistance produise quelqu'effet sensible sur leurs mouvemens.* Ce prix fut adjugé à la pièce que j'envoyai au concours. Résistance de l'éther.

Il résulte de mes recherches que la résistance de la matière éthérée tend à diminuer d'une très-petite quantité les grands axes des orbites elliptiques des planètes principales; d'où s'ensuivrait

une accélération dans leurs moyens mouvemens, ou une diminution dans les durées moyennes des révolutions. Ainsi, supposé que les observations indiquassent une telle accélération, et qu'on ne pût pas d'ailleurs l'expliquer par le principe de l'attraction, la résistance de l'éther pourrait en être la cause.

Le problème analytique, pour les satellites, était plus difficile. J'en donnai aussi la solution pour la lune; ce qui était d'autant plus nécessaire, que le mouvement moyen de ce satellite était celui dont l'accélération paraissait la mieux constatée, et que les géomètres n'avaient alors trouvé aucun moyen de l'expliquer par l'attraction.

Halley avait conjecturé, d'après quelques observations, que le mouvement moyen de la lune s'accélère, mais sans rien statuer sur la quantité. Mayer, en comparant les observations de deux éclipses de soleil, faites près du Caire, en 997 et 998, par l'astronome *Ibn-Ionis,* avec des observations modernes, avait conclu qu'il fallait ajouter au mouvement moyen de la lune une équation de 7 ou même de 9 secondes par siècle. L'explication que je donnai de cette accélération, par la résistance de l'éther, fut alors approuvée; et même de savans géomètres l'adoptèrent.

En supposant que la résistance de l'éther fût en effet la cause de l'accélération du mouvement

moyen de la lune, j'ai trouvé que les mouvemens moyens des planètes principales, surtout celui de la terre, n'éprouveraient que des altérations presqu'insensibles, comme on peut le voir dans une petite table jointe à ma pièce.

L'auteur d'un gros catalogue de livres astronomiques est venu dire, long-temps après, que *j'avais assigné la résistance de l'éther pour la cause de l'accélération du mouvement moyen des planètes.* Cela n'est point exact : il devait dire que ma supposition était conditionnelle, et que d'ailleurs j'avais conclu formellement que l'effet de la résistance de l'éther était comme nul pour les planètes principales; ce qui paraît aujourd'hui conforme aux observations.

SECTION X.

Du mouvement des comètes.

I.

Idée générale.

Les comètes étant des corps solides, semblables aux planètes, un motif bien puissant excita les géomètres du siècle passé, dans le temps même où ils étaient le plus occupés de la perturbation de ces derniers corps, à examiner également si une comète,

en passant dans le voisinage d'une grosse planète, n'éprouvait pas aussi des altérations dans son mouvement. On attendait le retour de la comète de Halley, laquelle, suivant les calculs de cet astronome, devait reparaître vers la fin de 1758, ou le commencement de 1759. C'était une occasion bien favorable d'y appliquer les méthodes modernes. Si la comète ne revenait point, on pourrait en attribuer la cause à des forces inconnues, dont la théorie neutonienne n'était pas comptable : si au contraire elle reparaissait dans les temps prescrits par cette même théorie, elle en fournirait une nouvelle preuve frappante.

II.

Avant de chercher les perturbations des comètes, il faut connaître d'abord les ellipses que ces astres décriraient autour du soleil, si chacun d'eux tournait librement, et sans éprouver l'action des autres corps célestes. Or, ce problème préliminaire a lui-même de grandes difficultés, qu'on a eu bien de la peine à surmonter par des méthodes qui fussent applicables à la pratique de l'astronomie, avec une exactitude suffisante. Les comètes décrivent des orbites très-allongées, ou très-différentes du cercle, et par conséquent leurs vitesses varient considérablement depuis le périhélie jusqu'à l'aphélie ; il n'y a encore que la seule comète de Hal-

ley, dont on connaisse la révolution périodique, et même on ne la connaît qu'à peu près; ces astres ne font en général que de courtes apparitions, et il faut déterminer leurs orbites entières, d'après les observations de quelques parties souvent parcourues avec beaucoup de rapidité. Toutes ces causes compliquent la question. Cependant, en supposant que l'on connaisse la nature de l'orbite, qu'on sache, par exemple, qu'elle doit être une parabole ou une ellipse, trois observations exactes suffisent pour arriver au but. S'il ne s'agissait même que d'une recherche analytique, on rappellerait assez facilement la question à la résolution d'une équation déterminée; mais cette équation serait d'un degré si élevé, que l'astronomie n'en pourrait tirer aucun secours. On est donc forcé d'employer ici des méthodes d'approximation.

Neuton en a proposé deux de cette dernière espèce, l'une dans son petit traité *de Systemate mundi,* l'autre dans son livre *des Principes,* toutes deux fondées sur l'hypothèse qu'on a trois observations exactes de la comète.

Dans la première, il faut que les trois observations soient peu éloignées l'une de l'autre, de sorte qu'on puisse regarder sensiblement comme des lignes droites les deux portions de l'orbite, séparées par l'observation intermédiaire. Neuton suppose d'ailleurs que les vitesses de la comète, sui-

vant ces lignes droites, varient conformément aux lois du mouvement parabolique, en considérant à cet égard l'orbite partielle comme un arc de parabole; ce qui donne des résultats qui n'ont pas tout à fait l'exactitude nécessaire.

La seconde méthode de Neuton approche plus de la vérité : l'auteur considère les deux portions de l'orbite comme réellement curvilignes et paraboliques; mais par là, il parvient à des formules et à des constructions géométriques, plus compliquées, et d'un usage moins commode pour les calculs astronomiques.

Les avantages attachés à la simplification de ces calculs ont fait imaginer plusieurs autres méthodes, dont quelques-unes sont très-utiles, ou du moins très-belles quant à la partie analytique. Celle que Bouguer a proposée est de ce nombre. Il suppose que l'on ait trois observations peu éloignées l'une de l'autre, tant de la longitude que de la latitude de la comète; que les portions de l'orbite, comprises entre les observations, puissent être regardées comme rectilignes; et que de plus les vitesses de la comète puissent être censées uniformes dans chaque partie. D'après ces bases, il parvient à des formules algébriques, qui pourraient être appliquées à la pratique; mais la troisième supposition, celle de l'*uniformité* des vitesses de la comète, est trop libre; et, sur ce point, la méthode

Ac. de Paris, 1733.

de Bouguer est inférieure aux méthodes de Neuton ; aussi a-t-elle été abandonnée.

Euler, dans sa dissertation : *Theoria motûs planetarum et cometarum*, 1744, a considérablement simplifié la seconde méthode de Neuton, mais d'une manière un peu indirecte. D'abord il forme une équation déterminée par le moyen de trois observations peu éloignées les unes des autres; mais, au lieu de résoudre directement cette équation, qui est très-compliquée, il emploie une quatrième observation à laquelle il fait quadrer l'équation par de fausses positions successives ; d'où il tire enfin la valeur approchée de l'inconnue.

En 1761, Lambert publia un ouvrage intitulé : *Insigniores orbitæ cometarum proprietates*, qui est principalement remarquable par ce beau théorème : Si deux ellipses ont le même grand axe; que dans chacune d'elles on considère un arc terminé par deux points, tels que la somme des rayons vecteurs menés aux extrémités de l'arc de l'une des ellipses, soit égale à la somme des rayons vecteurs menés aux extrémités de l'arc correspondant de l'autre ellipse, et que de plus les cordes soient égales dans les deux ellipses ; les temps employés à parcourir les deux arcs seront égaux, quelles que soient les excentricités de ces ellipses. Ce théorème s'applique, avec quelque change-

LAMBERT, né en 1728, mort en 1778.

ment, à la parabole. L'auteur en a fait le plus heureux usage.

M. Tempelhoff, dans un mémoire qui partagea le prix de l'académie de Berlin sur la théorie des comètes, pour l'année 1772, a emprunté quelques propositions de Lambert; mais il y a joint d'autres belles recherches de son invention, et il en a fait l'application à la comète de 1771.

M. Lagrange a donné, dans les volumes de l'académie de Berlin, pour les années 1778 et 1783, trois mémoires sur cette matière. Dans le premier, il discute les méthodes que je viens d'indiquer; dans le second et le troisième, il propose et perfectionne une méthode qui ne pouvait pas manquer d'être excellente, quant à la partie analytique; on regrette que l'auteur n'en ait pas fait des applications. Ces sortes d'applications sont elles-mêmes souvent très-pénibles, et demandent des éclaircissemens, des abréviations que le seul auteur des formules algébriques peut bien donner.

On trouve, dans le volume de l'académie des sciences de Paris, pour l'année 1779, une solution du problème des comètes, par Duséjour; et dans celui pour l'année 1780, une autre solution par M. Laplace. Ces deux auteurs ont obtenu, par des moyens différens, des résultats plus simples que ceux de la seconde pièce de M. Lagrange, qui a pris de là occasion de perfectionner et de géné-

raliser sa méthode, dans son troisième mémoire.

M. Legendre a traité la même question dans deux mémoires publiés en 1805. Sa méthode a l'avantage de s'appliquer facilement aux observations. En faisant cette application à la comète du mois d'octobre 1805, l'auteur a montré l'attention scrupuleuse avec laquelle il faut discuter les *données* du problème, pour distinguer les termes qui doivent être conservés, d'avec ceux qu'on peut négliger.

Il y a encore plusieurs autres excellens ouvrages sur la théorie des comètes, tels, par exemple, que les deux dissertations de M. Hennert, qui obtinrent l'*accessit* du prix de l'académie de Berlin, en 1778. Mais je ne puis pas pousser plus loin ce détail. Je viens au problème des perturbations de la comète de Halley.

III.

Perturbation de la comète de Halley.

Ce grand astronome-géomètre avait reconnu que la comète, en vertu de l'attraction de Jupiter, avait dû mettre un peu plus de temps à faire la révolution de 1607 à 1682, qu'elle n'en mettrait à faire la révolution suivante; mais ce calcul ne pouvait pas avoir la même exactitude que ceux des méthodes modernes. De plus Halley avait négligé l'attraction de Saturne, dont la masse est environ le tiers de la masse de Jupiter; ce qui devait pro-

duire aussi un dérangement sensible dans la comète. Les attractions de la terre et des autres planètes sont ici très-petites, et peuvent être négligées.

Clairaut fut le premier qui entreprit de déterminer les inégalités de cette comète, en ayant égard aux attractions de Jupiter et de Saturne. Le problème, quoique semblable dans le fond à celui des planètes, en différait cependant en deux points essentiels : dans le mouvement des planètes, les orbites sont peu excentriques, et peu inclinées les unes par rapport aux autres ; dans celui des comètes, les rayons vecteurs changent considérablement, et l'orbite de la comète peut faire un très-grand angle avec l'orbite de la planète perturbatrice. Or, ces différences changent nécessairement la nature ou le choix des moyens qu'il faut employer dans les deux cas, pour parvenir à des séries convergentes. Clairaut se livra avec ardeur à ce nouveau travail ; et avec le secours de quelques disciples qui l'aidaient à convertir les formules analytiques en nombres, il se trouva en état d'annoncer dans l'assemblée publique de l'académie des sciences, du 14 novembre 1758, que la comète paraîtrait au commencement de 1759, et qu'elle passerait à son périhélie vers le 15 avril suivant. Cette annonce, présentée avec beaucoup de réserve et de modestie, fit la plus grande sensation

parmi les savans, et même parmi les gens du monde. Dès ce moment, toutes les lunettes furent pointées vers la partie du ciel, où l'on savait d'avance que la comète devait paraître. Les astronomes français la cherchaient avec une espèce d'intérêt national. Elle fut aperçue en Saxe, en 1758 : on la vit à Paris, le 4 janvier 1759. Aussitôt que la nouvelle de cette apparition commence à se répandre dans les sociétés de Paris, on entend retentir de tous côtés le nom de Clairaut. On lui attribue tout l'honneur d'avoir prédit le retour de la comète ; la voix des savans qui réclament les droits de Halley, est étouffée. Quelques disciples de Clairaut, un peu trop zélés pour sa gloire, allèrent jusqu'à imprimer que sa solution du problème des trois corps avait sur toutes les autres un avantage particulier qui la rendait seule applicable au mouvement des comètes : avantage qu'ils faisaient consister en ce qu'elle donne l'équation de l'orbite, sous une forme telle qu'une partie représente le mouvement elliptique, l'autre l'effet des perturbations; mais s'ils avaient été un peu plus instruits, ou si Clairaut avait voulu les en avertir, ils auraient vu que le calcul tout seul, et sans le secours d'aucun artifice, menait immédiatement à la forme citée, en cherchant directement la nature de l'orbite *réelle,* comme il fallait le faire dans le cas des comètes.

Tous ces éloges exagérés et exclusifs, prodigués à Clairaut, attaquaient indirectement Euler et d'Alembert. Le géomètre étranger ignora ou dissimula cette injustice. Bien sûr que sa méthode pour les perturbations des planètes s'appliquait également aux comètes, il ne fit aucune réclamation. En général, il regardait la renommée avec un stoïcisme qui marque la supériorité de son génie et de sa raison. Il aimait la géométrie, pour elle-même, et non pour en faire ostentation; il répandait de tous côtés, dans les recueils des académies, dans les journaux, dans des ouvrages particuliers, ses nombreuses découvertes; et souvent elles devenaient la proie de quelques corsaires, qui s'en emparaient sans façon, et sans se donner même la peine de déguiser un peu leurs larcins. Jamais il ne s'en plaignait, et lorsque ses amis lui reprochaient cet excessif abandon de ses droits, il répondait froidement: *Cela n'est plus à moi; aussitôt qu'une chose est imprimée, elle appartient à tout le monde.*

D'Alembert ne put montrer la même indifférence dans l'affaire des comètes. Vivant au milieu du tourbillon de Paris, où il avait sans cesse les oreilles étourdies de *la prédiction* de Clairaut, ayant sacrifié aux sciences de très-grands avantages que la fortune lui avait offerts plusieurs fois, il ne voulait pas du moins qu'on cherchât à ternir la

gloire de ses travaux scientifiques, le seul bien auquel il attachait un véritable prix. Il garda néanmoins long-temps le silence; mais enfin quelques écrits où Clairaut était un peu trop exalté à ses dépens, le forcèrent de se défendre, et d'établir un compte sur les progrès qu'ils avaient fait faire l'un et l'autre au système du monde.

IV.

Dispute entre d'Alembert et Clairaut sur le problème des comètes.

Clairaut avait publié, en 1760, son livre sur la *Théorie du mouvement des comètes*. L'année suivante, d'Alembert traita la même question dans le tome second de ses *Opuscules mathématiques*, par les méthodes qu'il avait déjà employées pour la lune et les planètes principales. Ces méthodes, modifiées et appropriées aux comètes, produisirent une foule de recherches analytiques, très-savantes et très-ingénieuses, dont le principal objet était de diminuer considérablement des calculs, qui sont par eux-mêmes d'une longueur fatigante. L'auteur obtint l'approbation et les éloges des géomètres; mais voulant aussi donner à d'autres lecteurs une idée générale de son travail, il fit imprimer, dans le journal encyclopédique du mois de février 1762, une lettre dans laquelle il en expose les principaux résultats, avec des réflexions critiques sur celui de Clairaut. Cette lettre se réduit aux assertions suivantes, dont il faut voir les

preuves dans le volume des Opuscules mathématiques que j'ai cité.

1.° Le calcul de d'Alembert, pour la partie supérieure de l'orbite, est beaucoup plus simple que celui de Clairaut. 2.° La méthode de Clairaut laisse même dans ce calcul des incertitudes considérables et dangereuses, par la fausse et vague hypothèse à laquelle il est obligé d'avoir recours sur la position du périhélie : inconvénient que d'Alembert a évité. 3.° Lorsque la comète se rapproche de son périhélie vers la fin de la seconde révolution, il est alors très-essentiel de ne pas commettre une trop grande erreur dans la position de la planète perturbatrice : d'Alembert parvient au but d'une manière certaine; Clairaut semble n'y arriver que par hasard. 4.° Dans la partie de l'orbite, qui s'étend depuis le périhélie jusqu'à 90 degrés de part et d'autre, d'Alembert trouve le moyen de se passer des quadratures dans un grand nombre de cas, et par conséquent d'abréger encore considérablement le calcul de cette partie de l'orbite; ce que Clairaut n'a pas fait. 5.° Dans la double portion de l'orbite, qui s'étend depuis le point où la comète est aussi distante du soleil que Jupiter, jusqu'au point où sa distance au soleil est égale à 20 fois le rayon du grand orbe, d'Alembert trouve encore, par une considération qui lui est propre, le moyen d'abréger beaucoup le calcul. 6.° Dans

les cas même où d'Alembert est obligé de recourir aux quadratures, il réduit toujours le calcul à des quadratures simples et totales, et jamais à des quadratures représentées par un double signe d'intégration, comme celles que Clairaut a mises en œuvre. 7.° Enfin d'Alembert fait voir que l'erreur d'un mois que Clairaut avait commise dans la prédiction du passage de la comète au périhélie (qui eut lieu le 15 mars), doit être comparée non pas à une seule révolution, et encore moins à la *somme* de deux révolutions, comme les amis de Clairaut et lui-même l'avaient avancé, mais à la *différence* de deux révolutions, ce qui augmente beaucoup la quantité relative de cette erreur.

A toutes ces observations, Clairaut n'opposa guère (*Journal des Savans*, juin 1762) qu'une réponse générale et vague. Sa principale défense est que si sa méthode analytique est un peu longue en certains cas, elle est du moins toujours très-facile à mettre en pratique, surtout au moyen de quelques *tables* suivant lesquelles il a disposé ses formules générales; ce qui facilite les traductions numériques, sans qu'on ait beaucoup à craindre les erreurs presqu'inévitables dans ces sortes de calculs. On aperçoit qu'il reconnaît, au moins en partie, les avantages de la méthode de d'Alembert; il cherche seulement à les atténuer. Sur l'estimation de son erreur dans la prédiction du retour de la

comète, il fait des réflexions qui tendent plutôt à prouver la sévérité que l'injustice de la critique. Il y a cependant dans l'écrit de Clairaut un article qui devait faire, et qui fit en effet, une forte impression sur un grand nombre de lecteurs; c'est l'endroit où il reproche à d'Alembert de ne s'être occupé du problème des comètes, qu'après le retour de celle que l'on attendait, sans s'exposer au danger d'une prédiction qu'on pouvait regarder comme la pierre de touche des méthodes. D'Alembert est effectivement inexcusable aux yeux de la multitude, d'avoir laissé échapper l'occasion de participer au mérite de montrer une grande application de la géométrie à l'astronomie. Il trouva grâce devant ceux qui connaissaient son goût extrême et presqu'exclusif pour les recherches spéculatives, et son aversion pour les calculs purement numériques. A quoi l'on peut ajouter que Clairaut s'était associé plusieurs coopérateurs qui l'aidaient à traduire ses formules en nombres, tandis que d'Alembert travaillait seul, et qu'il se serait même fait scrupule de confier les résultats de ses calculs analytiques à des mains étrangères.

V.

Cette discussion sur le problème particulier des comètes donna bientôt lieu à un parallèle entre les méthodes que nos deux géomètres avaient em-

ployées dans le problème général des trois corps.

Clairaut se félicitait beaucoup d'avoir trouvé, par une intégration *heureuse et délicate*, comme il disait, une équation où la partie principale du mouvement était séparée des perturbations. D'Alembert lui prouva, 1.° qu'on savait intégrer depuis long-temps les équations de pareille nature; 2.° que dans le cas des planètes, la forme de l'intégrale que Clairaut vante, a l'inconvénient d'introduire dans l'expression du rayon vecteur des arcs de cercle qui ne doivent pas s'y trouver; 3.° que dans le problème des comètes, cette forme de l'intégrale est amenée nécessairement par la nature du calcul. On ne voit pas que Clairaut ait fait des réponses absolument satisfaisantes sur ces trois articles.

La peine qu'il éprouva dans toutes ces discussions, et qu'il ne dissimulait pas lui-même, fut un peu adoucie par le triomphe qu'il obtint en 1762. Il partagea avec Jean-Albert Euler le prix que l'académie de Pétersbourg avait proposé sur la théorie des comètes. Sa pièce est une extension et une rectification des méthodes contenues dans son ouvrage de 1760. Le mémoire de Jean-Albert Euler est un développement et une application des méthodes de son illustre père.

J'ajouterai ici, à la louange de Clairaut, une remarque faite dans ces derniers temps. On a reconnu que la planète d'Herschel avait causé une petite

augmentation dans le mouvement de la comète. Si Clairaut avait pu prévoir cet effet, il aurait mis plus de précision dans l'annonce du passage de la comète au périhélie.

VI.

Digression.

Qu'on me permette, avant d'aller plus avant, une digression qui ne sera pas cependant tout à fait étrangère à mon sujet, puisque je m'y propose de défendre Clairaut et d'Alembert contre des attaques très-déplacées, très-injustes, et de donner quelques détails sur le personnel de ces deux hommes illustres, que j'ai connus intimement l'un et l'autre.

Les gens du monde, ennemis secrets et jaloux du mérite littéraire, eux qu'on voit tous les jours faire retentir les tribunaux de leurs procès pour de misérables intérêts d'argent, s'avisèrent de condamner la chaleur avec laquelle nos deux grands géomètres se disputaient de sublimes vérités : comme si les hommes en qui réside le feu sacré du génie, pouvaient étouffer l'ambition de la gloire et de la supériorité, qu'il excite lui-même ! Je sais que la solitude et une forte application au travail amortissent quelquefois, ou modèrent du moins ce sentiment impérieux ; mais il existe toujours, la société l'exalte, et la rivalité des talens divisera toujours les hommes qui courent la même

carrière. Un jour Buffon s'entretenant avec un de ses amis sur ce malheureux penchant du cœur humain, disait (et je crois qu'il a imprimé quelque part la même chose) : *L'empire de l'opinion n'est-il donc pas assez vaste, pour que chacun trouve à y habiter tranquillement!..... Oui,* répondit l'ami ; *mais la dispute sera toujours à qui aura la meilleure habitation.* Il ne faut donc pas juger les grands hommes par les faiblesses qui leur sont communes avec ceux qui ne le sont pas. Les qualités sociales, qu'on ne saurait d'ailleurs trop estimer, trop rechercher pour la facilité et le bonheur du commerce de la vie, n'ont qu'une existence temporaire : les monumens du génie vivront éternellement; c'est par là que la postérité considère d'Alembert et Clairaut, et que la France s'honore de leur avoir donné la naissance.

Clairaut suça, pour ainsi dire, la géométrie avec le lait. Fils d'un maître de mathématiques, il apprit rapidement de lui les élémens de ces sciences. A l'âge de seize ans, il publia un ouvrage intitulé : *Recherches sur les courbes à double courbure,* qui lui marqua dès-lors une place distinguée parmi les grands géomètres. Deux ans après, l'académie des sciences le reçut au nombre de ses membres, dérogeant en sa faveur à l'usage où elle était de n'admettre dans son son sein que des hommes d'un âge mûr. Ce choix, approuvé généralement, fut

Portrait de Clairaut.

justifié par les profonds mémoires dont Clairaut enrichit les recueils de cette savante compagnie. En 1736, il fut envoyé en Laponie, avec Maupertuis, Camus et Le Monnier, pour mesurer un arc du méridien terrestre. J'ai parlé de son Traité de la figure de la terre, et de ses Recherches sur le système du monde : sa haute réputation est principalement fondée sur ces ouvrages.

Il avait le faible de presque tous les grands hommes : il aimait un peu trop la célébrité. Adroit à saisir tous les moyens de s'attirer des applaudissemens, il dirigeait ordinairement ses recherches vers des objets dont un grand nombre de personnes pouvaient apprécier, sinon la théorie, au moins les résultats; il travaillait ses ouvrages avec un extrême soin, et presque toujours il leur donnait toute la perfection dont ils étaient susceptibles. Ses Elémens de *géométrie* et *d'algèbre* lui firent des panégyristes nombreux et zélés parmi les jeunes étudians de ces sciences, flattés d'avoir pour guide un géomètre du premier ordre. Un caractère doux et liant, une grande politesse, une attention scrupuleuse à ne jamais blesser l'amour-propre d'autrui, lui donnèrent dans le grand monde une existence, une considération que le talent seul n'aurait pas obtenues. Par malheur pour les sciences, il se livra trop à l'empressement général qu'on avait de le connaître et de le posséder. Engagé à

des soupers, à des veilles, entraîné par un goût vif pour les femmes, voulant allier le plaisir à ses travaux ordinaires, il perdit le repos, la santé, et enfin la vie à l'âge de cinquante-trois ans, quoique son excellente constitution physique parût lui promettre une bien plus longue carrière.

Portrait de d'Alembert.

D'Alembert n'eut que de médiocres secours pour sa première instruction; il se forma tout seul aux sciences, si l'on excepte les leçons qu'il reçut sur les élémens au collége Mazarin. Bientôt il prit un vol rapide. A l'âge de vingt ans, il se fit connaître à l'académie des sciences, par un mémoire sur le calcul intégral, où il rectifiait et étendait quelques méthodes de l'*Analyse démontrée* du P. Reyneau. Peu de temps après, cette compagnie l'admit au nombre de ses membres. Le reste de sa vie a été rempli par une foule de mémoires et d'ouvrages particuliers, où brillent partout le génie de l'invention, et une fécondité dont il y a peu d'exemples. Il ne se borna pas aux sciences exactes: tout le monde connaît ses ouvrages de littérature, entr'autres sa belle *Préface* de l'Encyclopédie. Je ne dissimulerai pas que cette multitude de travaux nuisit un peu à la clarté dans ses recherches scientifiques. Le passage continuel d'un objet à l'autre ne lui permettait pas de donner tout le développement, toute la simplicité nécessaires pour mettre des matières abstraites à la portée du plus grand

An 1741.

nombre des lecteurs. Quand on lui en faisait une petite guerre, il répondait : *Le grand point est de trouver; on ne manquera jamais de metteurs en œuvre.*

Il aimait la louange, mais la louange sentie, méprisant ces éloges de tradition et ces fades complimens que le monde distribue au hasard. Excellent homme, ami tendre et compatissant, bienfaiteur généreux, il eut toutes les vertus essentielles. Les défauts qu'on lui a reprochés dans la société avaient leur source dans un fond de gaîté et de plaisanterie, auquel il s'abandonnait quelquefois, sans garder assez les mesures de la discrétion et de la prudence. Il éconduisait, par un accueil glacial, les flatteurs ou les importuns qui venaient l'obséder. *J'aime mieux*, disait-il, *être incivil qu'ennuyé.* Ne demandant jamais rien aux hommes en place, il s'était réservé le dangereux privilége, qu'il possédait au plus haut degré, de leur donner finement des ridicules, quand l'occasion s'en présentait. On juge qu'avec de tels principes, une telle conduite, il devait se faire (ce qui arriva en effet) un monde d'ennemis. Quelques gens de lettres, bas et jaloux, ne lui pardonnèrent pas de vouloir partager leurs travaux et leurs lauriers : ils auraient respecté en lui le grand géomètre seul; ils cherchaient à rabaisser le littérateur devenu leur rival; et parce qu'il n'était peut-être pas au premier rang dans cet

ordre des facultés humaines, l'envie tentait de faire croire qu'il n'y était pas non plus dans l'autre : raisonnement sophistique et insignifiant; on aurait dû au contraire plutôt conclure que ce passage des épines de la haute géométrie aux fleurs de la littérature, marquait la flexibilité d'un génie supérieur, dont le talent principal se portait aux sciences exactes.

Comme j'écris une histoire et non pas un panégyrique, je me permettrai de rapporter quelques hérésies de ce grand homme, en matière de physique et de littérature.

Sa passion pour les sciences spéculatives, justifiée par tant de belles découvertes, lui donnait de l'éloignement pour les applications pratiques, comme je l'ai déjà remarqué. De là, il faisait peu de cas des simples observateurs, des physiciens à machines, etc. Quand on le plaisantait sur son ignorance de certains faits de physique, connus des hommes les plus médiocres, il disait : *J'aurai toujours le temps d'apprendre ces belles choses*. Il est mort sans les avoir apprises. Physique.

En littérature, il avait adopté à peu près le système de Lamotte : il voulait des pensées dans la poésie; les images, l'harmonie, le choix pittoresque des expressions, n'étaient pour lui qu'un mérite fort secondaire. Il avait le malheur de ne pas bien sentir la supériorité des vers de Racine sur Littérature.

ceux de Voltaire. Il était encore plus injuste envers le célèbre lyrique Jean-Baptiste Rousseau, qu'il affectait de dépriser dans les conversations particulières, quoiqu'il lui rendît à peu près justice dans ses écrits imprimés. Vainement ses amis cherchaient à le rappeler aux principes du goût général : le goût ne se prouve point. Je me rappelle qu'un jour où il outrait la critique à ce sujet, devant une assemblée nombreuse où Saint-Lambert se trouvait, celui-ci alla prendre un Rousseau dans la bibliothéque, et lut en poëte la *Cantate de Bacchus,* qui enleva tout l'auditoire; puis remettant le livre à d'Alembert: *Mon ami,* lui dit-il, *voilà de la poésie, voilà de la musique.* De quel poids n'étaient pas ces paroles dans la bouche d'un poëte fameux, tout dévoué à Voltaire dont on connaît l'acharnement à poursuivre Rousseau, même au-delà du trépas? D'Alembert fut ébranlé; mais il resta dans son péché *.

Parallèle de Clairaut et de d'Alembert.

Si, en résumant tout ce que j'ai dit de Clairaut et de d'Alembert, considérés comme géomètres, on me demande maintenant auquel des deux l'opi-

* J'ajouterai encore ici une petite anecdote peu connue, et digne de l'être. Un ennemi de Rousseau ayant eu la bassesse de dire au prince Eugène que cet illustre poëte était fils d'un cordonnier.... *Cela me surprend,* répondit le prince, *je le croyais fils d'Apollon.*

nion générale accorde la préférence, je répondrai d'abord que la question a pu être litigieuse de leur vivant; mais il me semble qu'elle ne l'est plus aujourd'hui. Clairaut était certainement un homme d'un génie profond; tous ses ouvrages portent un caractère de perfection et d'élégance, qui a beaucoup contribué à répandre le goût et l'étude des mathématiques; on admire principalement son livre de la figure de la terre. Mais on ne peut pas nier, ce me semble, que d'Alembert ne l'ait égalé dans les sujets qu'ils ont traités l'un et l'autre. De plus d'Alembert a résolu un grand nombre d'autres problèmes d'un genre nouveau et original, comme, par exemple, le problème des cordes vibrantes, où il a montré le premier l'usage du calcul intégral aux différences partielles; celui de la précession des équinoxes, pour lequel il créa, en quelque sorte, une mécanique nouvelle; sa théorie de la résistance des fluides, etc. J'avoue qu'abusant de son extrême facilité, il n'a pas toujours mis dans ses solutions toute la précision, toute la clarté, toute l'élégance que l'on désirerait; j'ajouterai même qu'il s'est trompé quelquefois; mais enfin la quantité de pierres principales qu'il a posées à l'édifice des sciences, est très-considérable; et je crois qu'à cet égard il l'emporte de beaucoup sur son rival.

SECTION XI.

Nouvelles recherches sur les perturbations des corps célestes.

I.

Perturbations des satellites de Jupiter.

LA théorie des satellites de Jupiter fut le sujet du prix que l'académie des sciences de Paris proposa pour l'année 1766, et qui fut remporté par M. Lagrange.

Il était question de déterminer les inégalités du mouvement de ces astres autour de Jupiter, en ayant égard à leurs attractions mutuelles, et à celle qu'ils éprouvent de la part du soleil. Les autres corps célestes ont aussi une petite influence sur ce mouvement; mais elle peut être regardée comme nulle.

Si, dans le mouvement d'un satellite, on considère successivement et séparément les actions des autres satellites, on tombera dans le problème ordinaire des trois corps, qui seront ici Jupiter, le satellite proposé et le satellite perturbateur. Il en sera de même, si l'on ne fait entrer dans le calcul que Jupiter, le satellite proposé et le soleil comme planète perturbatrice. C'est ainsi

que Bailli a envisagé la question dans son *Essai sur la théorie des satellites de Jupiter*, et qu'ensuite il y a appliqué la méthode de Clairaut pour la lune. Mais cette méthode et toutes celles de pareille nature laissent dans l'incertitude, si en ne tenant compte dans la première approximation du mouvement d'un satellite, que de la seule force perturbatrice qui provient, ou d'un autre satellite, ou du soleil, on ne néglige pas des termes comparables à ceux qui doivent se trouver, et qui se trouvent en effet dans la seconde approximation.

BAILLI, né en 1733, mort en 1794.

M. Lagrange a levé ce doute : il a fait entrer tout à la fois dans le mouvement d'un satellite les attractions des autres et celle du soleil. Alors, en développant ses formules avec les précautions nécessaires pour ne négliger aucun terme qui doive être conservé, il a résolu le problème avec toute la généralité et toute l'exactitude que comportent les méthodes d'approximation. Les applications des formules aux différentes branches du sujet qui est très-étendu, demandaient un nouveau travail pénible et même difficile que l'auteur a exécuté avec le même succès. Cette pièce est un des plus beaux ouvrages qui aient paru sur le système du monde. On peut dire que M. Lagrange a ouvert dans cet ouvrage la véritable route pour traiter ces sortes de questions. Il s'est contenté de déduire de sa théorie les inégalités principales des satellites con-

nus jusqu'alors; mais il a donné une analyse nouvelle et générale pour déterminer les variations que les attractions mutuelles des satellites doivent produire dans la forme et dans les positions de leurs orbites : analyse qui conduit directement aux résultats qu'on a trouvés dans la suite par des méthodes plus simples.

II.

Perturbations de la lune.

Quoique la théorie de la lune eût déjà fait des progrès considérables, il y restait encore plusieurs difficultés à vaincre ou à éclaircir; ce qui ne doit pas surprendre dans ces sortes de problèmes où les erreurs inévitables des observations qui en forment les *données*, changent quelquefois la nature de certains termes analytiques. L'académie proposa pour sujet du prix de 1768, et ensuite de 1770, de perfectionner les méthodes connues, ou d'en donner d'autres pour fixer les équations qui étaient incertaines, et principalement d'examiner s'il peut résulter de l'attraction une équation séculaire dans le mouvement de la lune. Tel est le sens du programme dont j'abrège un peu l'énoncé littéral.

Op. Math. t. IV et V, 1768.

Avant l'ouverture du concours, d'Alembert proposa quelques vues utiles sur la question. Une des principales regardait la forme qu'il convient de donner à l'équation de l'orbite lunaire. Faut-il considérer l'orbite *réelle* que la lune décrit, ou l'or-

bite *projetée* sur le plan de l'écliptique? Si la lune se mouvait toujours dans un même plan, il y aurait un avantage évident à considérer l'orbite réelle, comme donnant une équation plus simple que celle de l'orbite projetée, et n'exigeant ensuite que des calculs très-faciles pour déterminer la longitude et la latitude de la planète. Mais la lune change continuellement de plan dans son mouvement, à cause de l'action du soleil : elle décrit une courbe à double courbure; de sorte qu'en faisant partir cette planète d'un axe fixe, la somme des angles réels qu'elle décrit n'est pas égale à l'angle compris entre le rayon vecteur initial et le rayon vecteur actuel; ce qui oblige de calculer séparément le mouvement des nœuds et l'inclinaison de l'orbite : élémens qui se trouvent au contraire renfermés d'une manière immédiate dans l'équation de l'orbite projetée. De plus, le plan de l'orbite réelle étant variable, l'argument de la latitude de la lune n'est plus égal à l'arc décrit par cette planète, et ne peut se déterminer que par un calcul particulier et délicat. Difficulté semblable pour évaluer l'angle d'élongation du soleil à la lune, d'où dépendent principalement les forces perturbatrices, cet angle étant formé par des lignes qui ne sont pas toujours dans un même plan. D'après ces considérations, d'Alembert a préféré l'orbite projetée, dans sa théorie de la lune; et il relève quelques petites erreurs échap-

pées à Clairaut qui a employé l'orbite réelle. Les autres remarques de d'Alembert méritent aussi attention ; il fait des observations essentielles sur la valeur de certains termes qui, dans l'expression du rayon vecteur ou du temps, deviennent beaucoup plus grands par l'intégration, qu'ils ne l'étaient dans les formules différentielles. Il indique des moyens pour s'assurer si l'équation *séculaire* de la lune (supposé qu'elle ait lieu en effet) peut s'expliquer par l'attraction, etc. Ces recherches et plusieurs autres qu'il serait trop long d'indiquer, répandirent beaucoup de jour sur la question proposée.

Le prix de l'académie fut adjugé à une pièce composée en commun par Euler et son fils Jean Albert. Cette pièce contient une analyse approfondie et plus complète qu'on ne l'avait encore, des inégalités de la lune. On n'y trouve aucun terme qui indique de variation séculaire dans le mouvement moyen de la lune, et les auteurs concluent qu'une telle variation, si elle a lieu, ne saurait être produite par l'attraction.

L'académie, en rendant justice à ce savant ouvrage, ne crut pas néanmoins que la question fût épuisée, et elle proposa le même sujet pour le prix de 1772. Ce prix fut partagé entre une nouvelle pièce de MM. Euler, et une de M. Lagrange.

Les réflexions contenues dans ces deux ouvrages

éclaircirent plusieurs points de théorie, mais ne firent rien connaître par rapport à l'équation séculaire.

III.

Il semble que plus les géomètres s'efforçaient d'approcher du but, plus l'académie se plaisait à les tourmenter et à vouloir, à toute force, qu'ils fixassent, pour ainsi dire, le sort de l'équation séculaire. Dans cette espérance, elle proposa pour sujet du prix de 1774 le même problème, mais avec des additions importantes. Elle demanda 1.° qu'on indiquât les moyens de s'assurer que les termes négligés dans les calculs des inégalités de la lune ne pouvaient produire aucune erreur sensible; 2.° qu'en ayant égard, non-seulement à l'action du soleil, mais encore, s'il était nécessaire, à l'action des autres planètes, et même à la figure non sphérique de la lune et de la terre, on examinât pourquoi la lune paraît avoir une équation séculaire, tandis qu'il n'en existe pas de sensible pour la terre. M. Lagrange remporta le prix.

Des deux parties de la question, l'auteur ne traita point la première, alléguant qu'après l'avoir long-temps examinée, il n'avait rien trouvé qui pût le satisfaire, ou qu'on pût ajouter à ce qui était déjà connu. Quant à la seconde, il ne statua rien sur l'action des autres planètes; il démontra seulement

que les figures non sphériques de la terre et de la lune ne pouvaient donner une équation séculaire à la lune. Ces nouvelles recherches portèrent M. Lagrange à jeter des doutes sur l'existence de l'équation dont il s'agit. Le temps n'était pas encore arrivé où il devait cependant reconnaître lui-même que cette équation a lieu en effet, et qu'elle s'explique par la théorie neutonienne, comme on le verra dans la suite.

IV.

Généralisation du problème des perturbations célestes.

Le problème des perturbations célestes s'étendait par degrés, et enfin on voulut savoir en général, si tous les élémens de l'orbite d'une planète demeurent invariables, ou si du moins quelques-uns ne sont pas sujets à des changemens.

On sait que ces élémens sont au nombre de cinq, savoir : le grand axe de l'ellipse primitive et non altérée; l'excentricité de l'orbite; l'inclinaison de cette orbite sur un plan fixe dans le ciel, tel que le plan moyen de l'écliptique; la position de la ligne des nœuds, ou de l'intersection de l'orbite planétaire avec le plan fixe; et enfin la longitude de l'aphélie, ou la position de la ligne des absides sur le plan de l'orbite.

Tous ces élémens demeureraient constamment les mêmes, et chaque planète décrirait une ellipse autour du soleil, si elle était uniquement soumise

à sa tendance vers cet astre ; mais à cause des attractions mutuelles que les planètes exercent les unes sur les autres, les mouvemens elliptiques sont continuellement dérangés, et les élémens de l'orbite éprouvent des variations plus ou moins sensibles. De ces variations, les unes sont simplement *périodiques*, et dépendent de la configuration des planètes, soit entr'elles, soit à l'égard de leurs nœuds et de leurs aphélies, de manière que lorsque ces configurations reviennent les mêmes, l'orbite reprend sa première forme ; les autres sont *séculaires*, ainsi nommées à cause de leur lenteur ; elles sont indépendantes de la configuration des planètes, et peuvent toujours croître avec le temps, ou avoir aussi des périodes extrêmement longues, et, dans ce dernier cas, elles ne sont appelées *séculaires* qu'un peu improprement.

Neuton et les premiers géomètres qui après lui ont considéré les perturbations célestes, se sont principalement attachés à déterminer les variations périodiques, pour lesquelles ils avaient le secours des observations. On savait aussi par la même voie que les inclinaisons des orbites, les aphélies et les nœuds avaient des inégalités séculaires ; mais les quantités n'en étaient connues que très-imparfaitement. Le principe de l'attraction a servi de proche en proche à constater l'existence et à faire

connaître à peu près la nature et les quantités de toutes ces espèces d'inégalités.

V.

En 1774, M. Lagrangé fit parvenir à l'académie des sciences de Paris, un mémoire intitulé : *Recherches sur les équations séculaires des mouvemens des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes*, qui fut publié seulement en 1778, dans le volume de l'académie pour 1774. Ce mémoire contient « des formules générales par » lesquelles on pourra déterminer, dans un temps » quelconque, la position absolue des orbites pla- » nétaires, et connaître par conséquent les véri- » tables lois des changemens auxquels les plans de » ces orbites sont sujets. On y trouve aussi des » *tables* des variations séculaires de l'obliquité de » l'elliptique, et de la longuer de l'année tropique, » avec les formules nécessaires pour calculer les » variations séculaires des étoiles fixes, en lon- » gitude et en latitude : ces tables s'étendent à vingt » siècles, tant avant qu'après l'année 1760 ».

M. Laplace a traité le même sujet d'une manière nouvelle dans un mémoire publié en 1775 dans le premier volume de l'académie pour l'année 1772; il avoue avec candeur qu'il avait eu connaissance des recherches de M. Lagrange, et que naturellement elles auraient dû paraître les premières.

VI.

En comparant quelques anciennes observations avec les modernes, les astronomes ont cru remarquer que les mouvemens moyens de Saturne, de Jupiter et de la lune, n'étaient pas uniformes. J'ai déjà cité l'opinion de Halley et de Mayer sur l'altération du mouvement moyen de la lune. Suivant les *tables* de Halley, l'équation séculaire de Saturne est de 84 secondes pour le premier siècle, et augmente ensuite comme les carrés des temps; celle de Jupiter est seulement de 36 secondes pour le premier siècle, et augmente de même comme les carrés des temps.

Euler, dans sa première pièce sur les irrégularités de Jupiter et de Saturne, ne leur avait point trouvé d'équation séculaire; mais, dans la seconde, il trouva une équation séculaire *égale* pour l'une et l'autre planète, et dont la quantité est de 2 minutes 23 secondes pour le premier siècle, à compter de 1700. M. Lagrange, dans un mémoire sur cette matière, a trouvé pour Saturne un équation séculaire soustractive du moyen mouvement, dont la quantité est d'environ 14 secondes au bout de la première révolution comptée de 1750; et pour Jupiter une équation séculaire additive à son moyen mouvement, et qui monte à près de 3 secondes, pendant la première révolution comptée depuis la même époque.

Ac. de Turin, tom. III, an. 1765-1767.

On ne connaît pas les principes sur lesquels Halley a fondé ses déterminations. Les résultats de MM. Euler et Lagrange sont si différens, que M. Laplace, soupçonnant que ces deux grands géomètres n'avaient peut-être pas poussé assez loin les approximations, voulut savoir par lui-même à
Sav. étrang. t. VII, 1775. quoi s'en tenir sur ce point important. Pour cela, il calcula, avec plus de soin qu'ils n'avaient fait, les termes qui pouvaient produire des inégalités croissantes comme les carrés des temps, dans les mouvemens moyens de Saturne et de Jupiter, et il reconnut que ces termes se détruisaient mutuellement; d'où il conclut que les moyens mouvemens de Saturne et de Jupiter n'ont point d'inégalités séculaires proprement dites, ou que du moins ces inégalités, si elles existent, sont insensibles. Mais comme dans ces calculs il avait regardé les excentricités et les inclinaisons des orbites comme des quantités très-petites, et qu'il n'avait tenu compte que des deux premières puissances de ces quantités, restait encore à savoir si les termes qui devaient contenir les autres dimensions de ces mêmes quantités, ne donneraient pas des inégalités séculaires.

Ac. de Berlin, 1776. En 1776, M. Lagrange, considérant d'une manière directe et *à priori*, les variations auxquelles peut être sujet le grand axe de l'orbite d'une planète, en vertu des forces perturbatrices qui proviennent de l'action des autres planètes, parvint à

représenter ces variations par une formule générale et très-simple, de laquelle il résulte que le grand axe ne peut jamais contenir aucun terme proportionnel au temps, quelque loin que l'on continue l'approximation par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites.

VII.

Quelque temps après, le même géomètre embrassa, dans une suite de mémoires imprimés parmi ceux de l'académie de Berlin, aux années 1781, 1782, 1783, etc., toute la théorie des variations séculaires que peuvent éprouver les élémens de l'orbite d'une planète.

En réduisant au calcul toutes les forces qui agissent sur une planète, M. Lagrange forme trois équations différentielles du second ordre. Ainsi l'équation de l'orbite, en termes finis, doit contenir six constantes arbitraires. Il traite les trois équations différentielles comme s'il n'y avait pas de forces perturbatrices, et il arrive par là à des équations intégrales, semblables à celles de l'orbite non troublée, mais dans lesquelles chaque constante arbitraire se trouvera augmentée d'une quantité variable provenant des forces perturbatrices, et qui exprimera les dérangemens causés à l'élément de l'orbite, représenté par la même constante. De cette manière, l'effet total des perturbations sera ren-

Ac. de Berlin, 1781, 1782.

fermé dans les variations des élémens; et pour avoir la partie séculaire de ces variations, il suffira de rejeter tous les termes qui contiendraient des sinus et des cosinus, comme ne pouvant donner que des variations périodiques. Tel est en géneral l'esprit de la méthode que M. Lagrange a employée : méthode neuve et directe, dont il applique successivement les résultats aux cinq élémens de chacune des orbites des six planètes principales, alors connues, Mercure, Vénus, la terre, Mars, Jupiter et Saturne.

VIII.

Ac. de Berlin, 1783, 1784.

Les équations d'où M. Lagrange a déduit les variations séculaires des élémens de l'orbite d'une planète, renfermant aussi les variations périodiques, il a également examiné ces dernières. Cet examen était d'autant plus utile, que la méthode de l'auteur, d'ailleurs très-simple, est exempte de l'inconvénient que les autres avaient d'introduire dans la première expression approchée du rayon vecteur, des termes proportionnels au temps, qui ne doivent pas s'y trouver, et dont on ne se débarrassait ensuite que par des moyens indirects, et même précaires. M. Lagrange fait avec adresse et sûreté la séparation des termes qui doivent donner les variations séculaires, d'avec ceux qui représentent les variations périodiques.

IX.

A la suite du premier mémoire sur les variations périodiques (An. 1783), on en trouve un sur les variations séculaires, dans lequel le même auteur, après s'être assuré précédemment que le grand axe de l'orbite d'une planète troublée, ne peut éprouver que des variations *périodiques*, et que par conséquent le moyen mouvement n'éprouve aucune variation séculaire proprement dite, en tant qu'elle dépendrait seulement du grand axe de l'ellipse primitive, l'auteur, dis-je, examine maintenant si les variations séculaires auxquelles sont sujets les autres élémens de l'orbite, c'est-à-dire, l'excentricité, l'inclinaison, la position de la ligne des nœuds, le lieu de l'aphélie, ne peuvent pas influer sur le moyen mouvement, et y produire aussi des variations du même genre. Il trouve en effet qu'en poussant la précision du calcul jusqu'aux secondes dimensions des excentricités et des inclinaisons, il vient des termes dépendant de ces quantités, lesquels produisent des équations séculaires dans les moyens mouvemens; mais ces équations sont extrêmement petites, et peuvent être regardées comme nulles.

X.

Cependant M. Laplace ayant jugé que l'approxi-

Ac. de Paris, 1785, 1786.

mation portée seulement jusqu'aux secondes dimensions de l'excentricité et de l'inclinaison, n'était pas suffisante par rapport à Saturne et à Jupiter, a donné une nouvelle théorie du mouvement de ces deux planètes, dans laquelle il étend les approximations jusqu'à l'ordre des quatrièmes puissances des excentricités.

Les moyens mouvemens * de ces deux planètes sont tels que cinq fois celui de Saturne est à très-peu près égal à deux fois celui de Jupiter, ou, ce qui revient au même, que la *différence* entre cinq fois la durée de la révolution de Jupiter et deux fois la durée de la révolution de Saturne est une quantité très-petite. Or, suivant les calculs de M. Laplace, ce rapport produit dans les élémens des orbites des deux planètes, des variations considérables dont les périodes embrassent plus de neuf siècles, et qui sont la source des grands dérangemens observés par les astronomes : le mouvement moyen de Saturne éprouve une inégalité dont la période est d'environ neuf cent dix-neuf ans, et dont la quantité, qui diminue par degrés insensibles, était, vers l'an 1750, de 48 minutes 44 secondes ; le mouvement moyen de Jupiter est soumis à une inégalité correspondante, dont la période est exactement la même,

---

* *Moyens mouvemens*, ou *vitesses angulaires moyennes*, expressions synonimes.

mais dont la valeur, affectée d'un signe contraire, est plus petite dans le rapport de 3 à 7. « On doit » rapporter, dit l'auteur, à ces deux grandes inéga» lités jusqu'à présent inconnues, le ralentissement » apparent de Saturne, et l'accélération apparente » de Jupiter. Ces phénomènes ont atteint leur » *maximum* vers l'an 1560; depuis cette époque, » les moyens mouvemens apparens des deux pla» nètes se sont rapprochés sans cesse de leurs vé» ritables moyens mouvemens. Voilà pourquoi, » lorsqu'on a comparé les observations modernes » aux anciennes, le moyen mouvement de Saturne » a paru plus lent, et celui de Jupiter plus rapide, » que par la comparaison des observations modernes » entr'elles; tandis que ces dernières ont indiqué » une accélération dans le mouvement de Saturne, » et un ralentissement dans celui de Jupiter ».

Il y a encore dans les mouvemens moyens de Saturne et de Jupiter d'autres inégalités périodiques que M. Laplace fait connaître. Quant aux inégalités séculaires proprement dites, dont la nature est de croître ou de décroître continuellement, M. Laplace n'en a point trouvé dans les mouvemens moyens de ces deux planètes.

Le même auteur a donné une théorie complète du mouvement des satellites de Jupiter. Entr'autres conséquences qu'il a tirées de son analyse, on remarque deux théorèmes très-curieux : l'un, que

Ac. de Paris, 1788.

» le moyen mouvement du premier satellite, plus » deux fois celui du troisième, est rigoureusement » égal à trois fois celui du second ; l'autre, que la lon- » gitude moyenne du premier satellite, moins trois » fois celle du second, plus deux fois celle du troi- » sième est exactement et constamment égale à » 180 degrés ». M. Laplace ajoute que les observations avaient déjà donné d'une manière extrêmement approchée ces résultats qu'on peut maintenant regarder comme rigoureux.

M. Delambre a calculé, d'après les théories de M. Laplace, des nouvelles *tables* pour les mouvemens de Saturne et de Jupiter, ainsi que de leurs satellites : tables fort estimées des astronomes.

XI.

Équation séculaire de la lune.

On pense bien qu'en traitant des équations séculaires des planètes, les géomètres n'ont pas oublié celle que les observations indiquaient très-probablement pour la lune. Le 19 décembre 1787, M. Laplace informa l'académie des sciences de Paris qu'il avait trouvé le moyen d'expliquer l'équation séculaire de la lune par l'action du soleil sur ce satellite, combinée avec la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre ; et il donna la preuve de cette assertion dans un très-beau mémoire imprimé parmi ceux du volume de l'académie pour 1786, et qui parut en 1788.

Ac. de Paris, 1786, p. 395.

M. Lagrange a fait voir ensuite que les mêmes résultats se tirent des formules générales qu'il avait trouvées pour l'altération des moyens mouvemens des planètes, et qui ne lui avaient donné que des quantités insensibles pour Jupiter et Saturne. (acad. de Berlin, an 1783.) En effet, la ressemblance de ces problèmes est entière. De même que le soleil, Jupiter et Saturne forment un système particulier de trois corps qui s'attirent mutuellement, et dont les deux derniers tournent autour du premier; la terre, la lune et le soleil forment un autre système semblable, car il est indifférent pour cela que la terre tourne autour du soleil, ou que le soleil soit supposé tourner autour de la terre. Ac. de Berlin, 1792.

XII.

Les problèmes des perturbations célestes ne pouvant se résoudre que par approximation, on doit du moins apporter la plus grande attention à ne négliger que les termes presque insensibles.

Nous avons vu que M. Lagrange avait démontré d'une manière directe et générale (acad. de Berlin 1776) que le grand axe de l'orbite elliptique d'une planète ne peut recevoir aucune variation proportionnelle au temps, quelque loin qu'on pousse les approximations par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites; mais il s'é-

tait arrêté à la première approximation, par rapport aux masses * des planètes perturbatrices.

Le 20 juin 1808, M. Poisson, professeur de mathématiques à l'école polytechnique, lut à l'institut un mémoire dans lequel il s'est proposé de déterminer l'influence que les masses des planètes purturbatrices peuvent avoir sur les variations des élémens de l'orbite elliptique. M. Lagrange, l'un des commissaires chargés d'examiner ce mémoire, en rend le compte suivant, dans une nouvelle extension qu'il a donnée à sa propre théorie sur les variations des élémens des orbites elliptiques imprimée dans les volumes de l'académie de Berlin, an. 1781, 1782, etc.

Prem. semestre des Mém. de l'Inst. 1808, pag. 1.

« M. Poisson a fait un pas de plus sur ce sujet : » il a poussé l'approximation de la formule jus- » qu'aux termes affectés des carrés et des produits » des masses, en ayant égard dans cette formule » à la variation des élémens que j'avais regardés » comme constans dans la première approxima- » tion. En employant les méthodes et les for- » mules connues pour la variation des élémens » elliptiques, il a su donner aux termes qui forment » la seconde approximation et qui ne proviennent

---

* On entend ici par les *masses des planètes perturbatrices*, les petites fractions qui représentent ces masses comparativement à la masse du soleil, prise pour unité.

» que des variations des élémens de la planète troublée, une disposition et une forme telles, qu'il » est facile de prouver qu'aucun de ces termes, qui » peuvent être d'ailleurs en nombre infini, ne peut » jamais donner dans le grand axe des termes croissans comme le temps. A l'égard de ceux qui » doivent provenir des variations des élémens des » planètes perturbatrices, ils échappent à son analyse : pour suppléer à ce défaut, il a recours à » l'équation générale des forces vives sous la forme » donnée par M. Laplace, dans le premier volume » de sa *Mécanique céleste*, et il parvient, d'une » manière ingénieuse, à faire voir que ces sortes de » termes ne peuvent non plus produire dans le grand » axe des variations proportionnelles au temps ».

La méthode de M. Poisson est fondée, comme on voit, sur les formules du mouvement elliptique. En reconnaissant qu'elle est très-digne de l'estime des géomètres, M. Lagrange a pensé que sans connaître ces formules on pouvait arriver (et il est arrivé en effet) aux mêmes résultats, immédiatement et à *priori*, par le moyen des équations différentielles de l'orbite, et des conditions de la variabilité des constantes arbitraires ajoutées aux intégrales qu'on obtient lorsqu'on n'a égard qu'à la seule action du soleil, et qu'on néglige celle des planètes perturbatrices.

En considérant la variation des constantes sous

un nouveau point de vue, l'auteur trouve ici des formules plus simples et plus commodes que celles de ses premières recherches contenues dans les volumes de l'académie de Berlin. De là il déduit les équations des variations séculaires pour tous les élémens des orbites elliptiques, avec toute l'exactitude qu'on voudra par rapport aux puissances et aux produits des excentricités et des inclinaisons. Ces mêmes équations ont l'avantage de donner, relativement au grand axe, des expressions analogues à celles qui résultent des formules du mouvement elliptique. Ainsi, « il est démontré en gé» néral, et quelle que soit l'inclinaison de l'orbite » primitive sur le plan fixe, que la variation du » grand axe ne peut contenir aucun terme non pé» riodique, ni dans la première, ni dans la seconde » approximation, du moins en tant qu'on n'a égard » dans celle-ci qu'aux variations de l'orbite trou» blée ».

Quant aux termes provenant des variations des élémens des planètes perturbatrices, on ne peut y appliquer la même analyse, qu'en faisant dans les équations différentielles de l'orbite un petit changement qui consiste à rapporter le mouvement au centre commun de gravité du soleil et des planètes, au lieu de le rapporter immédiatement au soleil, comme on avait fait auparavant. Par ce changement, les équations différentielles du mouvement sont

plus simples, et prennent une forme *symétrique*; le calcul devient uniforme et général, et n'est plus sujet à aucune exception. M. Lagrange obtient de cette manière les variations des élémens de chacune des orbites rapportées au centre commun de gravité, et il démontre, par une même analyse, que le grand axe de chacune de ces orbites ne peut avoir, dans les deux premières approximations, aucune inégalité croissante comme le temps. Passant ensuite du mouvement autour du centre commun de gravité, au mouvement autour du soleil, et regardant celui-ci comme elliptique, il trouve, par la théorie des *osculations*, les expressions variables des élémens; d'où il tire cette conclusion finale, qu'il n'existe point d'inégalités proportionnelles au temps dans les grands axes des orbites rapportées au soleil.

M. Laplace est parvenu de son côté à des résultats analogues, par une méthode qui lui est propre, et qui est fondée sur des formules qu'il avait données précédemment dans sa *Mécanique céleste*, imprimée en 1799 et années suivantes.

XIII.

M. Lagrange a fait encore, sur le même sujet, de nouvelles découvertes de la plus haute importance. Il a étendu son analyse pour les variations des élémens des planètes à un système de corps qui

Prem. semestre des Mém. de l'Inst. 1808, pag. 257.

agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, et en l'appliquant aux formules générales qu'il avait données dans sa *Mécanique analytique* pour un tel système, il est parvenu à un résultat analogue à celui qu'il a trouvé pour les planètes, et dont ce dernier n'est plus maintenant qu'un cas particulier.

Ib. pag. 363.
Enfin, par un nouvel effort de cette sagacité analytique qui le distingue, il a réduit toutes ses formules à un degré de simplicité et d'élégance qui paraît ne laisser plus rien à désirer dans cette profonde matière.

XIV.

J'ai poussé sans interruption jusqu'à ces derniers temps la théorie des perturbations du mouvement des planètes. Reportons-nous maintenant un peu en arrière, et considérons les progrès que celle du mouvement des comètes a faits depuis Clairaut, d'Alembert et Euler.

Nouvelles recherches sur les perturbations des comètes.

Dans l'astronomie physique du mouvement des planètes, on est conduit presque continuellement par des observations exactes et nombreuses. Celle des comètes n'a pas à beaucoup près le même avantage. Les anciens n'avaient pas des idées justes de ces astres, et ce qu'ils ont dit de leurs apparitions, n'est d'aucun secours pour la connaissance de leurs mouvemens. On n'a commencé à observer les co-

mètes avec soin qu'au temps de Copernic ; mais d'un autre côté, ces astres décrivant des orbites très-allongées, et employant des temps très-considérables à faire une révolution, on ne peut observer qu'une très-petite partie de leurs cours. On n'a donc que des *données* presque toujours insuffisantes et même incertaines pour résoudre le problème du mouvement des comètes ; mais si nous ne pouvons pas espérer d'arriver à une solution complète, il faut du moins tâcher d'aplanir la voie pour nos successeurs, autant que cela sera possible dans l'état actuel des choses.

Animée par ce puissant motif, notre académie proposa pour les sujets de ses prix, aux années 1776 et 1778, d'examiner les perturbations qu'une grosse planète peut produire dans le mouvement d'une comète qui passe dans son voisinage. M. Fuss, élève du grand Euler, et gendre de Jean Euler, remporta le prix double de 1778.

Suivant l'esprit général du problème des trois corps, l'auteur ne considère à la fois que le soleil, la comète et une planète perturbatrice. Pour faciliter même le calcul, il fixe d'abord les limites où commence et finit la perturbation : après quoi partageant cet intervalle en plusieurs portions, il détermine les effets que le soleil et la planète troublante exercent sur la comète dans chacune de ces portions. Il examine un cas extrême, celui où une comète

raserait la surface de la terre, et par conséquent éprouverait de la part de cette planète la plus grande altération possible; il trouve que cette altération serait peu considérable, et que du moins elle n'aurait point d'influence sensible sur la durée de la révolution de la comète; d'où il conclut qu'on peut considérer l'action du soleil indépendamment de celle de la planète perturbatrice : *et vice versâ.* Ainsi, en calculant séparément les deux effets, puis les ajoutant ensemble, on aura l'effet total pour chaque intervalle de l'orbite de la comète. Tel est l'esprit général de la méthode de M. Fuss, qui montre partout un grand savoir dans la partie analytique du problème, et dans la discussion des observations.

XV.

M. Fuss n'ayant déterminé le mouvement de la comète que partiellement, et sans observer la loi de continuité, l'académie crut devoir proposer encore la même question pour le sujet du prix de 1780, qui fut remporté par M. Lagrange.

Les formules de M. Lagrange sont générales pour tout le cours de l'orbite; mais, dans l'extrême difficulté de pouvoir appliquer indistinctement, et de la même manière, ces formules à toutes les parties de l'orbite, l'auteur y fait différentes modifications relativement aux distances où la comète se

trouve à l'égard de la terre et du soleil : modifications qui n'interrompent pas d'ailleurs la loi de continuité. Il finit par indiquer l'usage de sa théorie pour la comète qu'*Appian* observa en 1532, et que Halley avait jugée devoir être la même qu'une comète observée en 1661 ; d'où l'on avait conçu l'espérance de la revoir vers l'année 1789 ou 1790.

XVI.

Cette espérance n'avait pas cependant un fondement bien solide ; et pour évaluer la probabilité de l'événement, il fallait discuter avec le plus grand soin tous les caractères qui pouvaient faire discerner si en effet la comète observée en 1661 était la même que celle de 1532. L'académie proposa cette discussion pour le sujet du prix de 1782, lequel fut remporté par M. Méchain, alors astronome de la marine, et devenu depuis membre de l'académie des sciences et de l'institut national.

Méchain fit dans cette occasion tout ce qu'on pouvait attendre d'un excellent astronome-géomètre. La conclusion de tous ses calculs fut qu'il n'était pas certain que la comète de 1532 et celle de 1661 fussent le même astre. Ce doute, formé dix ans avant l'époque où l'on attendait la comète, n'était que trop légitime : on ne l'a pas revue. Cependant l'académie, croyant qu'on pouvait encore

MÉCHAIN né en 1744 mort en 1804.

éclaircir davantage la question proposa successivement, au moins par voie d'hypothèse, la théorie des perturbations de cette comète, pour les sujets des prix des années 1784, 1786, 1788; mais n'ayant reçu aucun mémoire sur ce problème, elle l'abandonna.

XVII.

Le sujet du prix qu'elle proposa pour l'année 1790 était la théorie de la planète découverte par M. Herschel; prix qui fut remporté par M. Delambre, aujourd'hui l'un des secrétaires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'institut national. Sa pièce n'a pas été imprimée. Le même savant remporta le prix de 1792, dont le sujet était de perfectionner les tables des mouvemens des satellites de Jupiter.

L'académie des sciences fut détruite en 1793, comme on l'a déjà vu.

XVIII.

On trouve dans les recueils des académies, dans les journaux, et ailleurs, des ouvrages sur la théorie des mouvemens célestes. Il y a, par exemple, des mémoires intéressans de Lexel sur le mouvement des comètes, dans la collection de l'académie de Pétersbourg; M. Duval Leroi a traité la théorie des perturbations de la planète d'Herschel, d'après les

formules de M. Lagrange, dans le volume de l'académie de Berlin pour l'année 1792. Tous ces mémoires méritent l'estime des géomètres. *Primum est invenisse*, disait Neuton : cela est vrai; mais ajouter à une invention est une autre invention qui, quoique d'un mérite secondaire, demande quelquefois beaucoup de sagacité.

XIX.

L'ouvrage le plus complet, et un des plus remarquables qui aient paru dans ces derniers temps sur l'astronomie physique, est la Mécanique céleste de M. Laplace, que j'ai déjà eu occasion de citer. « Je me suis proposé, dit l'auteur dans son » introduction, de présenter sous un même point » de vue ces théories (les théories astronomiques) » éparses dans un grand nombre d'ouvrages, et » dont l'ensemble embrassant tous les résultats de » la gravitation universelle, sur l'équilibre et les » mouvemens des corps solides et fluides, qui » compose le système solaire et les systèmes semblables répandus dans l'immensité des cieux, » forme la Mécanique céleste ». Il n'y a point en effet de question d'astronomie physique que M. Laplace n'ait approfondie, et sur laquelle il n'ait répandu des lumières nouvelles, soit en donnant plus d'extension à ses premières recherches con-

tenues dans les Mémoires de l'académie, soit en simplifiant ses méthodes, et mettant ainsi les lecteurs plus à portée de les suivre. Cèt ouvrage est si connu, qu'il est inutile d'en faire ici un extrait; d'ailleurs cela m'écarterait trop de mon sujet.

CHAPITRE VII.

Progrès de l'optique.

I.

ON connaissait depuis long-temps les principales propriétés de la lumière, sa réflexibilité, sa réfrangibilité, sa chaleur quand elle est réunie au foyer d'un verre ardent, etc., sans connaître sa contexture intime, ou la nature des parties intégrantes dont ce fluide est composé. Neuton est le premier qui ait pénétré et révélé ce grand secret : il a, pour ainsi dire, anatomisé la lumière et les couleurs: Toujours attentif à écarter l'esprit de système, toujours guidé par l'expérience, il approfondit l'optique pendant trente ans; et après avoir donné par intervalles quelques essais de ses méditations dans les *Transactions philosophiques* de la société royale de Londres, il rassembla enfin ses idées anciennes et nouvelles en un *Traité d'optique*, qui parut en 1706 : ouvrage original, comparable au livre des *Principes*. Principes généraux de l'optique.

La lumière n'est point, comme on le croyait auparavant, une substance pure et homogène : elle est composée de sept espèces primordiales d'ato- Idée générale de l'Optique de Neuton.

mes lumineux, différens en couleurs, en réfrangibilité et en réflexibilité. Ces sept rayons primitifs sont le rouge, l'orangé, le jaune, le vert, le bleu, l'indigo ou pourpre, et le violet. Neuton les sépara par l'expérience suivante, aujourd'hui connue de tout le monde. En introduisant, par un très-petit trou, les rayons du soleil dans une chambre obscure, et en leur présentant obliquement l'une des faces d'un prisme triangulaire de verre, dont l'axe est perpendiculaire à celui du faisceau de rayons, on observe que ce faisceau se brise, ou change de route en entrant dans le verre, traverse le prisme en ligne droite, repasse dans l'air en se brisant encore, et va former sur un carton blanc, éloigné de 15 ou 18 pieds, une image oblongue, où l'on distingue clairement sept bandes colorées, suivant cet ordre de bas en haut : rouge, orangé, jaune, vert, bleu, indigo, violet. Le faisceau entier est donc composé de sept rayons, qui ont des réfrangibilités différentes. Le rayon rouge est le moins réfrangible de tous, comme s'écartant le moins de la perpendiculaire à la face d'émergence du prisme; la réfrangibilité augmente progressivement pour les autres rayons, jusqu'au rayon violet qui est l'autre extrême. Si l'on place un nombre quelconque de prismes à la suite du premier, et que le faisceau traverse tous ces prismes, il y aura de nouvelles réfractions; l'image peinte sur le carton se renversera

ou se redressera; mais les sept bandes colorées subsisteront toujours inaltérablement les mêmes, et conserveront toujours entr'elles le même ordre de situation.

Les objets qui ne sont pas lumineux par eux-mêmes, ou qui n'ont qu'une clarté réfléchie, nous paraissent rouges, orangés, jaunes, etc., selon qu'ils nous renvoient (au moins pour la très-grande partie) des rayons rouges, orangés, jaunes, etc.: la couleur blanche est formée par le concours de tous les rayons; un objet nous paraît noir, parce qu'il absorbe les rayons qu'il reçoit; il ne s'aperçoit que par le reflet des rayons qui viennent des objets circonvoisins. Dans tous les cas, il se fait une perte de rayons, lesquels demeurent dans les interstices de l'objet, ou sont dispersés de côté et d'autre. Les rayons absorbés peuvent produire une chaleur sensible : ainsi, par exemple, aux rayons du soleil un chapeau noir est plus chaud qu'un chapeau blanc.

Un rayon de lumière qui passe d'un milieu dans un autre, se brise, et s'approche ou s'éloigne de la ligne droite menée au point d'entrée perpendiculairement à la surface de séparation, selon que le premier milieu est moins ou plus dense que le second; et l'effet est d'autant plus sensible, que les densités des deux milieux sont plus différentes; mais le rapport du sinus de l'angle d'incidence au

sinus de l'angle de réfraction demeure toujours le même pour toutes sortes d'obliquités ; il change seulement de valeur, quand les deux milieux comparatifs viennent à changer, ou que l'un demeurant le même, l'autre change. Par exemple, si le rayon passe de l'air dans l'eau, les deux sinus sont comme les nombres 4 et 3, ou comme 12 et 9; et s'il passe de l'air dans le verre, ils sont comme les nombres 3 et 2, ou comme 12 et 8.

Les sept rayons primitifs ayant différentes réfrangibilités, quand on parle en général de la réfraction d'un faisceau de lumière, qui comprend tous les rayons, il s'agit de la réfraction moyenne : c'est à peu près celle du vert. Quelquefois on n'a besoin que de cette réfraction moyenne; quelquefois il faut avoir égard aux différences de réfrangibilité de tous les rayons, comme on le verra, lorsque nous parlerons des *lunettes achromatiques*.

Si un rayon de lumière, après avoir passé d'un milieu dans un autre plus dense, comme, par exemple, de l'air dans l'eau, revenait sur ses pas, il reviendrait exactement par le même chemin. Ainsi, s'étant approché de la perpendiculaire dans le premier cas, il s'en éloignerait dans le second. De là, et du rapport constant qui existe toujours entre le sinus d'incidence et le sinus de réfraction, il peut arriver que la réfraction se change en réflexion, *et vice versâ* : par exemple, un rayon de lumière

qui entre de l'air dans l'eau; en rasant presque l'eau, ou en faisant un angle d'incidence presque droit, se brise sous un angle d'environ 48 degrés 50 minutes; donc si le rayon revenait de l'eau dans l'air, il se réfracterait sous un angle de près de 90 degrés, ou ne ferait que raser la surface de l'eau; et si l'angle de retour était de plus de 48 degrés 50 minutes, le rayon dans l'eau se réfléchirait.

La réfrangibilité et la réflexibilité des rayons tiennent à la même cause. Ceux qui sont le moins réfrangibles sont aussi le moins réflexibles, c'est-à-dire, que plus un rayon oppose de résistance à se briser, plus il en oppose aussi à se réfléchir. Ainsi le rayon rouge a besoin d'un plus grand angle d'incidence que les autres, pour que la réfraction se change en réflexion. Mais toutes les fois qu'il y a réflexion, de quelque nature que soit le rayon, l'angle de réflexion est toujours égal à l'angle d'incidence.

Neuton explique en détail tous ces phénomènes de la lumière. Son Traité *d'optique* a fait époque dans cette science, comme son livre *des Principes* dans l'astronomie physique. Quelques-unes de ses expériences furent d'abord contestées, parce qu'on les répétait mal. Il lui est seulement échappé, dans cette multitude de faits, d'observations et de raisonnemens, de légères méprises qui ne portent aucune atteinte au fond de l'ouvrage.

Des géomètres célèbres, marchant sur les traces de Neuton, se sont appliqués à développer et à soumettre au calcul les lois de la réfraction et de la réflexion de la lumière. Le mémoire de Clairaut sur ce sujet mérite surtout d'être remarqué.

Ac. de Paris, 1739.

II.

Instrumens d'optique.

La principale utilité de l'optique est de nous avoir procuré ces instrumens qui aident la vue ; et auxquels l'astronomie, la physique, l'histoire naturelle, etc., doivent en grande partie les immenses progrès qu'elles ont faits dans les temps modernes. Entre ces instrumens, les lunettes *dioptriques* tiennent le premier rang par la simplicité de leur construction et la multitude de leurs usages. Mais elles sont sujettes à deux imperfections qui tendent à empêcher que les rayons ne se réunissent en un même point ou foyer, et par là affaiblissent la clarté. Le premier inconvénient provient de la courbure circulaire de l'objectif qui fait que les rayons occupent une certaine étendue le long de l'axe, et c'est ce qu'on appelle l'*aberration de sphéricité* ; le second, qu'on appelle l'*aberration de réfrangibilité*, dépend de la diverse réfrangibilité des rayons, qui forment un nouvel obstacle à leur réunion. Avant Neuton, on connaissait l'aberration de sphéricité ; mais il est le premier qui ait fait connaître l'aberration de réfrangibilité. Tous les

auteurs qui l'ont précédé regardaient les rayons lumineux comme homogènes, et comme ayant tous la même réfrangibilité. Dans cette persuasion, Descartes n'ayant en vue que de détruire l'aberration de sphéricité, proposa les objectifs elliptiques, hyperboliques, etc., qui n'eurent pas de succès, comme je l'ai déjà remarqué; de sorte qu'on fût obligé de s'en tenir aux objectifs circulaires. Ceux-ci ne doivent avoir qu'une petite ouverture, afin de diminuer l'aberration de sphéricité : ils donnent une quantité suffisante de lumière pour les lunettes terrestres, dont les longueurs ont peu d'étendue. Dans les lunettes astronomiques, l'ouverture (quoique toujours petite comparativement à la surface totale) a besoin d'un plus grand champ pour recevoir la quantité nécessaire de rayons; mais alors il faut augmenter en proportion la longueur de la lunette; ce qui augmente son poids, et la rend sujette à se courber. Neuton, sans abandonner la forme circulaire des objectifs, avait soupçonné qu'il était possible de faire disparaître l'aberration de sphéricité, en les composant avec deux verres dont l'espace intermédiaire serait rempli d'eau; mais on ne voit pas qu'il ait donné de la suite à cette idée. Il a encore moins pensé à employer le même moyen pour corriger l'aberration de réfrangibilité qu'il regardait comme indestructible. Je dois même ajouter, par respect pour la

vérité, que l'inexactitude de l'une de ses principales expériences a retardé pendant long-temps la découverte des lunettes *achromatiques*, ou de ces lunettes par lesquelles on détruit les couleurs de l'*iris*, c'est-à-dire de cette espèce d'*arc-en-ciel* qui déforme l'image. Il tourna donc principalement ses recherches en ce genre vers la perfection des télescopes *catadioptriques*.

III.

Découverte des lunettes achromatiques.

Ac. de Berlin, 1747.

L'optique instrumentale demeura à peu près dans cet état jusqu'à l'année 1747, où Euler entreprit de détruire l'aberration de réfrangibilité par la combinaison de plusieurs verres, entre lesquels on enfermerait de l'eau ou d'autres liqueurs, à l'imitation de ce qui se passe dans la structure de l'œil humain. Il détermina par le calcul la forme et les dimensions de ces nouveaux objectifs, dont le succès lui parut certain. On sent qu'une telle proposition, faite par un savant tel qu'Euler, devait attirer l'attention des opticiens capables de l'entendre et de la vérifier.

Dollond, né en 1706, mort en 1761.

Dollond, célèbre opticien anglais, consommé dans la théorie et la pratique de son art, saisit avec avidité cette idée générale; mais jugeant que les hypothèses employées par Euler, concernant les rapports des réfractions de l'eau et du verre, n'étaient pas suffisamment exactes, il y substitua celles

qui résultent des expériences de Neuton : alors il trouva par les formules d'Euler que tous les rayons ne pouvaient être réunis en un même foyer, à moins que le télescope n'eût une longueur infinie : inconvénient qui renversait le projet d'Euler, si les expériences de Neuton étaient parfaitement exactes ; et comment oser élever des doutes sur l'espèce d'infaillibilité qu'on attribuait au créateur de l'optique moderne ? Transac. phil. 1752.

Euler, sans se permettre de pareils doutes, répondit qu'on opposait à ses formules des quantités trop petites pour infirmer une théorie qui lui paraissait fondée incontestablement sur les propriétés des réfractions ; il démontra quelques incompatibilités dans les calculs que Dollond inférait des expériences de Neuton ; il insistait de nouveau sur la similitude de son télescope avec les yeux des animaux, où la nature a placé différentes humeurs dont les qualités réfractives se corrigent mutuellement : enfin, il soutenait qu'on parviendrait tôt ou tard à lever toutes les difficultés qui paraissaient contraires à sa théorie. Ac. de Berlin, 1753.

Il fut bientôt secondé per Klingenstierna, célèbre géomètre suédois. Ce dernier fit remettre à Dollond, au mois d'octobre 1755, un écrit par lequel il combattait, avec les armes de la géométrie et de la métaphysique, une expérience de Neuton, qu'on opposait à Euler. Alors Dollond, déjà Ac. de Paris, 1756. pag. 405.

fort ébranlé, soupçonna que Neuton pouvait s'être trompé, et il prit le parti le plus sage, celui de répéter l'expérience, en suivant d'ailleurs le procédé de l'auteur.

Op. de Neuton, édit. lat. 1640, pag 92. La proposition expérimentale de Neuton est conçue en ces termes : *Si les rayons de lumière traversent deux milieux contigus, de différentes densités, comme l'eau et le verre, soit que les surfaces réfringentes soient parallèles, ou qu'elles soient inclinées, et que cependant la réfraction de l'une détruise la réfraction de l'autre, de manière que les rayons émergens soient parallèles aux rayons incidens : alors LA LUMIÈRE SORT TOUJOURS BLANCHE.*

Cette conclusion, *la lumière sort toujours blanche*, formait tout le nœud du différent ; et si elle était vraie, il fallait renoncer à la théorie d'Euler. Quelque prévenu que Dollond fût en faveur de Neuton, comme il cherchait sincèrement la vérité, il fit l'expérience que je vais rapporter d'après le compte qu'il en rend lui-même dans une lettre écrite, en 1757, au P. Pézénas, traducteur de l'Optique de Smith, et imprimée dans le second tome de la traduction, pag. 426.

IV.

Près d'un petit trou d'environ un demi-pouce de diamètre, pratiqué à la fenêtre d'une chambre

obscure, et destiné à introduire la lumière du soleil, Dollond plaça un prisme de verre dont la section était un triangle isocèle formant au sommet situé en haut, un angle de 8 degrés 52 minutes. A la face la plus éloignée du trou, il adossa un second prisme creux posé en sens contraire, c'est-à-dire de manière que la base était en haut. Les faces de ce prisme qui devait contenir de l'eau, étaient de minces plaques de verre, et on pouvait ouvrir plus ou moins l'angle de la pointe. Cela fait, en introduisant la lumière du soleil par le petit trou de la fenêtre, elle passait d'abord de l'air dans le prisme de verre, ensuite dans le prisme d'eau, et enfin de l'eau dans l'air; ainsi elle éprouvait trois réfractions. Après plusieurs tentatives, Dollond parvint à faire en sorte que la direction de la lumière, au sortir du prisme d'eau, fût parallèle à la direction qu'elle avait à son entrée dans le prisme de verre; ce qui était le cas de la proposition de Neuton; mais alors la couleur des rayons émergens ne fut point blanche comme Neuton l'avait affirmé; au contraire, le bord inférieur du soleil était fortement teint de bleu, et le bord supérieur était d'une couleur rougeâtre. Ainsi Dollond reconnut d'abord que l'eau ne disperse pas les couleurs autant que le verre, à réfractions égales; ensuite, ayant varié l'angle au sommet du prisme d'eau, de telle manière que la dispersion des cou-

leurs fût la même dans les deux cas, il trouva qu'alors les deux réfractions n'étaient pas égales. Toutes ces observations firent revenir Dollond au projet d'Euler, et il ne mit plus en doute la possibilité de son exécution, sinon avec l'eau et le verre, du moins avec d'autres matières transparentes, de différentes densités.

Il employa d'abord à cet effet le verre et l'eau, comme Euler l'avait proposé; mais il reconnut bientôt, d'après les formules du géomètre allemand, que les courbures à donner aux objectifs étaient trop considérables pour ne pas produire une aberration fort sensible dans le foyer, et qu'un pareil inconvénient ne pouvait être levé que par un autre, celui de trop diminuer l'ouverture des objectifs. Euler avait senti et annoncé lui-même que c'étaient-là les seules et véritables difficultés que sa théorie pût éprouver dans la pratique.

Dollond, parfaitement versé dans la connaissance des différentes espèces de verres, et convaincu qu'il s'en devait trouver dont les pouvoirs réfractifs fussent fort différens, imagina d'employer deux sortes de verres connus en Angleterre sous les noms de *flintglass* et de *crownglass*. Le premier est un verre très-blanc et fort transparent, qui donne les iris les plus remarquables, et par conséquent celui dans lequel la réfraction du rouge diffère le plus de celle du violet. Le second

Trans. phil. 1754.

a une couleur verdâtre, et ressemble beaucoup en qualité à notre verre commun ; il donne la moindre différence entre les réfractions du rouge et du violet. Dollond mesura les rapports des réfrangibilités par le même moyen qu'il avait employé pour le verre et l'eau : il trouva que le rapport des différences de réfrangibilités dans les deux matières était environ celui de 3 à 2. Ayant fait cette substitution dans les formules d'Euler, il obtint d'abord des résultats qui n'étaient pas très-satisfaisans. Mais enfin, à force de tentatives et de combinaisons, soit dans le choix des matières d'une excellente qualité, soit dans celui des sphères les plus propres, dans chaque cas, à réunir les foyers de toutes les couleurs, il parvint à construire des lunettes achromatiques, très-supérieures, en parité de circonstances, aux lunettes ordinaires. Il en construisit d'abord une de cinq pieds dont l'effet était le même que celui d'une lunette ordinaire de quinze pieds. Du reste, il ne fit point connaître ses moyens, et la question était de les découvrir ou d'en proposer d'autres encore plus avantageux.

V.

On voit par là que ce sujet offrait un vaste champ de recherches théoriques et pratiques. Au mémoire de 1747, Euler en fit succéder plusieurs autres, soit pour réfuter les premières assertions de Dollond,

Ac. de Berlin, 1753, 1757. Ac. de Turin, tom. III.

soit pour éclaircir et étendre davantage la théorie. Il donna toutes les formules nécessaires pour la construction des télescopes et des microscopes, quel que soit le nombre des verres dont ils puissent être composés, et il fit diverses applications de ces formules. Enfin il rassembla toutes les parties de la dioptrique dans un *traité complet* de cette science, en trois volumes, qui parurent successivement aux années 1769, 1770, 1771.

Ac. de Paris, 1757, 1761, 1762.

Les géomètres français traitèrent aussi le même sujet. Clairaut en fit la matière de trois excellens mémoires dont le premier fut lu à l'académie de Paris, en 1761. Il commence par rapporter quelques expériences sur les propriétés des verres réfringens; ensuite il enseigne à trouver les foyers des objectifs composés de plusieurs lentilles, et les aberrations que la lumière éprouve en les traversant. En corrigeant l'aberration de réfrangibilité, il donne en même temps les moyens de détruire, autant qu'il est possible, celle de sphéricité; il montre l'usage de ses formules pour comparer les réfringences du cristal d'Angleterre et du verre commun, et pour faire connaître les changemens que la détermination plus ou moins exacte du rapport de réfraction des matières qu'on emploie doit apporter aux dimensions des objectifs composés. Il ne s'est pas borné à considérer les rayons incidens qui se trouvent dans un plan passant par le point radi-

cal de l'axe optique de la lunette; il a eu égard aussi aux autres qui sont en bien plus grand nombre. Il finit par des remarques de pratique dont nos opticiens ont fait un usage utile.

D'Alembert s'est fort occupé de l'optique en différentes occasions. Le premier volume de ses *Opuscules mathématiques*, publié en 1761, contient diverses remarques et difficultés dignes d'attention sur les principes qu'on emploie communément en optique, tant par rapport aux lois de la vision directe, que par rapport à celles de la vision réfléchie ou réfractée. Ses principales recherches ont eu pour objet la théorie des lunettes achromatiques sur laquelle roulent le troisième tome tout entier de ses *Opuscules mathématiques*, publié en 1764, et successivement une foule d'autres mémoires. Tous ces écrits où l'on remarque beaucoup d'élégance et de finesse, ne sont presque que d'analyse pure, et je ne puis que les indiquer ici. Si on en veut prendre une idée juste, il faut les lire la plume à la main. J'en citerai seulement une belle proposition. L'auteur donne des formules par le moyen desquelles on peut non-seulement anéantir l'aberration de réfrangibilité, mais encore la diminuer en raison donnée; ce qui produit l'avantage d'éviter l'inconvénient où l'on tomberait, si, pour détruire seulement cette aberration, on aug-

Op. Math. tom. III, IV V, VI, VII.

Ac. de Paris 1764, 1765, 1767.

mentait trop l'aberration de sphéricité ou la courbure des surfaces.

Plusieurs savans ont écrit sur la théorie des lunettes achromatiques. Voyez, par exemple, les traductions que le P. Pézénas et M. Duval-le-Roi ont données de l'optique de Smith.

Je passe à quelques objets particuliers d'optique qui se croisent un peu avec les précédens, quant à l'ordre des temps que celui des matières ne permet pas de suivre exactement.

VI.

Affaiblissement de la lumière.

La lumière, soit directe, soit réfléchie, soit réfractée, perd nécessairement une partie de son intensité ou de sa force par les obstacles qu'elle rencontre : obstacles qui changent eux-mêmes quand les densités des milieux viennent à changer. Il y a, par exemple, une différence sensible entre la lumière du soleil au solstice d'été, et sa lumière au solstice d'hiver ; la lumière du soleil est incomparablement plus grande que celle de la lune, pour une même hauteur au-dessus de l'horizon, etc. Huguens avait jeté quelques idées sur cette nouvelle branche de l'optique ; il avait indiqué une méthode pour estimer la quantité de lumière que Jupiter et Saturne reçoivent du soleil, et pour comparer la lumière du soleil avec celle des étoiles. Mais outre que cette méthode portait sur des hypothèses vagues

Cosmoth. lib. II.

et un peu incertaines, la question demandait à être éclaircie par une suite d'expériences exactes et nombreuses, desquelles on pût tirer les moyens de comparer les lumières dans tous les cas.

Bouguer entreprit et poussa très-loin ce travail délicat ; et par là il s'est approprié un sujet curieux en lui-même, et d'une fréquente application dans les matières de physique. Il publia ses premières recherches, en 1729, dans un petit ouvrage intitulé : *Essai d'optique sur la gradation de la lumière*, fort augmenté dans la suite, et imprimé en 1760, deux ans après la mort de l'auteur, sous le titre de *Traité d'optique sur la gradation de la lumière*. Ce traité contient un grand nombre d'expériences et d'observations, de discussions physiques et mathématiques, d'applications intéressantes aux divers problèmes que la matière fait naître ; on y apprend à comparer les lumières envoyées par différens corps, tels que le soleil, la lune, les planètes, les étoiles ; à connaître la quantité de lumière que réfléchissent les surfaces polies ou brutes, et celle qui se perd par l'absorption ou la dispersion des rayons ; à évaluer les différens degrés de transparence des corps diaphanes, etc. Je ne puis qu'indiquer en gros tous ces objets sur lesquels il faut consulter l'ouvrage même.

VII.

Miroirs d'Archimède.

La question des miroirs brûlans d'Archimède se renouvela en 1747. Sous la première période, j'ai rapporté les raisons et les témoignages qui en prouvent la possibilité; sous la troisième, j'ai dit que Descartes les avait traités de *fabuleux* et d'*impossibles*, et j'ai promis de discuter les objections de ce grand philosophe. Tâchons enfin de fixer notre opinion sur un sujet qui, quoique simplement curieux, a mérité du moins à cet égard l'attention des savans.

Dioptrique, pag. 122.

Descartes, après quelques remarques sur la manière dont les rayons solaires réunis produisent la chaleur, conclut, « qu'ayant deux verres ou miroirs ardens, dont l'un soit beaucoup plus grand » que l'autre, de quelle façon qu'ils puissent être, » pourvu que leurs figures soient toutes pareilles, » le plus grand doit bien ramasser les rayons du so» leil en un plus grand espace, et plus loin de soi » que le plus petit; mais que ces rayons ne doivent » point avoir plus de force en chaque partie de » cet espace, qu'en celui où le plus petit les » ramasse; en sorte qu'on peut faire des verres ou » miroirs extrêmement petits qui brûleront avec » autant de violence que les plus grands; et un » miroir ardent dont le diamètre n'est pas plus » grand qu'environ la centième partie de la dis-

» tance qui est entre lui et le lieu où il doit ras-
» sembler les rayons du soleil; c'est-à-dire qui a la
» même proportion avec cette distance, qu'a le dia-
» mètre du soleil avec celle qui est entre lui et
» nous, fût-il poli par un ange, ne peut faire que
» les rayons qu'il assemble échauffent plus à l'en-
» droit où il les assemble, que ceux qui viennent
» directement du soleil. Ce qui se doit entendre
» aussi des verres brûlans à proportion. D'où vous
» pouvez voir que ceux qui ne sont que demi-sa-
» vans en optique se laissent persuader beaucoup
» de choses qui sont impossibles, et que ces mi-
» roirs dont on a dit qu'Archimède brûlait des
» navires de fort loin, devaient être extrêmement
» grands, ou plutôt qu'ils sont fabuleux ».

On voit ici une preuve bien marquée de cet esprit de système qui dominait Descartes. S'il avait consulté l'expérience; elle lui aurait appris que la chaleur produite sur chaque point d'un objet se propage de proche en proche, et se communique à toute la masse; de sorte, qu'à égale intensité de force, un foyer un peu grand a de l'avantage sur un plus petit, pour embraser tout le corps dans un même temps. Par exemple, un verre ardent qui a 32 pouces de diamètre, et un foyer de 8 lignes de largeur, à la distance de 6 pieds, fond le cuivre placé à son foyer en moins d'une minute, tandis qu'un autre miroir tout semblable, sous des di-

Hist. de l'ac. 1747, p. 107.

mensions douze fois plus petites, produit à peine une chaleur sensible à son foyer. L'objection de Descartes tombe donc d'elle-même. Ajoutez qu'il considérait toujours des verres d'une courbure continue, et qu'il ne connaissait pas les effets qu'on peut obtenir de l'assemblage de plusieurs petits miroirs plans.

Kircher, né en 1601, mort en 1680.

Ac. des belles-lett. t. XLII, p. 450.

Le P. Kircher, jésuite, se proposa le problème suivant, dans son ouvrage intitulé : *Ars magna lucis et umbræ*, qui parut environ neuf ans après la dioptrique de Descartes : *Machinam ex speculis planis construere ad centum pedes urentem.* « Il avait observé, 1.° que plus un miroir plan est » grand, plus il renvoie de lumière sur le plan qui » lui est opposé ; 2.° qu'un miroir plan d'un pied » produisait à cent pieds de distance, une image » lumineuse d'un quart de pied. Il imagina en con» séquence d'employer consécutivement cinq mi» roirs plans dirigés vers le même point éloigné de » cent pieds, et il observa que la chaleur y aug» mentait à mesure, de sorte qu'elle devint pres» que insupportable après l'addition du cinquième » miroir. D'où il conclut qu'en multipliant le nom» bre des miroirs, on augmenterait les degrés de » chaleur, et on porterait l'incendie à une distance » bien plus considérable qu'on ne pourrait le faire » avec des miroirs concaves, de quelque espèce » qu'ils fussent ».

En 1747, Buffon exécuta la même expérience plus en grand et d'une manière plus concluante par rapport à l'effet des miroirs d'Archimède. Il fit construire, par un excellent ingénieur-opticien nommé *Passement*, un miroir par réflexion, composé de 168 glaces étamées, de 6 pouces sur 8 pouces chacune, éloignées les unes des autres d'environ 4 lignes, mobiles à charnières; chacune de ces glaces peut se mouvoir en tout sens et indépendamment les unes des autres; les quatre lignes d'intervalle servent à la liberté de ce mouvement et à porter les images à l'endroit qu'on veut. Au moyen de cette machine, Buffon pouvait faire tomber sur le même point les 168 images, et par conséquent brûler à plusieurs distances, comme 20, 50 et jusqu'à 150 pieds. Sans rapporter toutes ses expériences, disons seulement qu'au mois d'avril, par un soleil assez faible, il embrasa le bois à 150 pieds de distance; il fondit le plomb à 140 pieds: résultats plus que suffisans pour constater l'effet des miroirs d'Archimède. Et ce qui fortifie cette conclusion, les vaisseaux romains ne pouvaient guère être arrêtés à plus de 30 pas ou de 90 pieds de la muraille: une plus grande distance aurait rendu inutiles les machines avec lesquelles, selon Plutarque, les Syracusains accrochaient et enlevaient les vaisseaux de Marcellus.

Ac. de Paris, 1747.

Les physiciens-géomètres regardaient ainsi la

question comme décidée, lorsque le savant Dupuy donna, en 1777, la traduction du fragment d'Anthémius qui a été cité sous la première période, et qui atteste positivement le même fait. Ce fragment, presque oublié depuis long-temps, contient plusieurs problèmes d'optique, et spécialement celui des miroirs d'Archimède. Après avoir observé qu'Archimède n'a pu employer un miroir catoptrique concave, 1.° parce qu'un tel miroir eût été d'une grandeur démesurée; 2.° parce que dans ces sortes de miroirs il faut que l'objet à brûler soit placé entre le miroir et le soleil, et que la position des vaisseaux romains, à l'égard de Syracuse, excluait cet arrangement : Anthémius explique le mécanisme des miroirs d'Archimède, à peu près comme Kircher l'a indiqué et Buffon l'a exécuté.

Ajoutons un mot sur Anthémius. C'était un homme rare en son temps par ses profondes connaissances dans toutes les parties des mathématiques, surtout dans la mécanique. Il florissait sous l'empereur Justinien; il construisit, d'abord avec An 550. Isidore, autre savant distingué, puis tout seul après la mort de ce collègue, la fameuse basilique de l'église de Sainte-Sophie à Constantinople; on lui attribue la première invention des voûtes en dômes; il avait composé plusieurs ouvrages dont il ne reste que le fragment cité.

VIII.

L'optique, aidée par la mécanique, a produit dans cette quatrième période, plusieurs instrumens très-ingénieux, et très-utiles aux mesures terrestres, à l'astronomie, à l'art nautique, etc. Il serait trop long, et d'ailleurs étranger à mon sujet, d'en faire ici l'énumération : je me borne à dire quelque chose des principaux. Divers instrumens.

De ce nombre est d'abord *l'octant* de Hadley, dont on fait usage à la mer, pour déterminer la distance d'un astre à l'horizon, ou à un autre astre. Il forme un secteur de cercle de 45 degrés ; son limbe est divisé en 90 parties égales, dont chacune représente un degré, par la propriété de l'instrument, comme on le verra tout à l'heure. Octant.

Je suppose ici, pour la plus grande clarté, qu'il s'agisse de déterminer la hauteur d'un astre, par exemple celle du soleil, au-dessus de l'horizon. Au haut de l'un des côtés de l'octant, il y a une pinnule, ou courte lunette, à laquelle on applique l'œil ; sur le côté opposé, et en regard, est placée, perpendiculairement au plan de l'instrument, une petite glace, dont une partie est étamée, l'autre ne l'est pas et permet à l'œil de voir au travers les objets situés à l'horizon ; une alidade mobile autour du centre, porte en cet endroit un miroir plus grand, aussi perpendiculaire au plan de l'octant, mais en-

tièrement étamé, qui reçoit et réfléchit la lumière des objets terrestres ou célestes; cette lumière va d'abord frapper directement ce second miroir qui la renvoie vers la partie étamée du premier, d'où elle est renvoyée, par une seconde réflexion, vers l'œil de l'observateur.

Maintenant, l'observation qu'on veut faire de la hauteur du soleil, doit être précédée d'une opération, qui consiste à disposer les deux miroirs de telle manière qu'ils soient exactement parallèles, au premier instant, c'est-à-dire, quand l'alidade du grand miroir est placée sur le zéro de la graduation. Or, pour obtenir ce parallélisme, il faut faire en sorte que l'alidade étant dans la position qui vient d'être indiquée, l'image de l'horizon de la mer, renvoyée vers l'œil par la double réflexion, et l'image du même horizon, vue directement à travers la partie non étamée du petit miroir, tombent exactement sur la même ligne. Cette opération préliminaire étant achevée, l'observateur tient l'instrument dans le plan vertical du soleil, et visant à l'horizon, par la partie non étamée du petit miroir, il fait tourner l'alidade dans le sens de la graduation, jusqu'à ce que l'image réfléchie du soleil vienne coïncider avec la ligne horizontale de la vision directe : alors le nombre des parties du limbe, que l'alidade aura parcourues, exprimera le nombre de degrés dont le soleil est élevé au-dessus de l'ho-

rizon; en effet, les lois de la catoptrique nous apprennent que lorsqu'on fait tourner un miroir, l'image de l'objet tourne d'une quantité double. Telle est la raison pour laquelle on a divisé les 45 degrés du limbe en 90 parties égales.

Quelques auteurs assurent que Neuton avait inventé l'octant vers le commencement du siècle passé; mais Hadley ayant publié le premier la théorie et la construction de cet instrument, et en ayant fait lui-même l'épreuve à la mer, avec le plus heureux succès, passe généralement, même en Angleterre, pour en être l'auteur. On y a fait dans la suite quelques légers changemens, qui ne touchent point à sa nature. Ajoutons que c'est le premier instrument nautique où l'on ait employé la double réflexion de la lumière. Trans. phil. 1731 et 1732.

IX.

En 1752, Tobie Mayer proposa un instrument *goniométrique* très-ingénieux, et très-utile dans la *géodésie*. Cet instrument consiste en une règle fixe, au-dessus de laquelle tourne circulairement une alidade à lunette. Par le mouvement continuel de cette alidade, on forme tant qu'on veut *d'angles multiples* de celui qu'il s'agit de mesurer; d'où l'on déduit ensuite la valeur de cet angle avec beaucoup plus d'exactitude qu'on ne le ferait par une simple mesure. L'auteur voulant rendre cet Ac. de Gott. t. II, p. 325.

instrument portatif et d'un usage commode, employait à la mesure des angles une *échelle de cordes* et un compas.

Peu de temps après, il eut l'idée d'appliquer le même principe de la multiplication des angles aux opérations nautiques qui se font avec l'octant; mais il mesure ici les angles par le moyen d'un cercle entier, gradué dans toute l'étendue de la circonférence, et portant deux miroirs de même nature et de même usage que ceux de l'octant, avec cette différence néanmoins, que le petit miroir (celui qui est en partie étamé, en partie diaphane), au lieu d'être fixé au corps de l'instrument, est porté, ainsi que la lunette d'observation, par une alidade particulière qui tourne sur le cercle entier, et dont le mouvement est indépendant de l'alidade du grand miroir. Ce cercle *répétiteur* a de l'avantage sur l'octant, en ce qu'il donne la distance angulaire de deux objets, par exemple du soleil et de la lune, avec plus de précision; mais il est plus pesant, et il a d'ailleurs, comme l'octant, l'inconvénient d'exiger, pour opération préparatoire, la vérification du parallélisme des miroirs, parce que dans ces deux instrumens, on reçoit toujours du même côté l'image de l'objet vu par la double réflexion. Voyez l'ouvrage de Mayer : *Theoria motûs lunæ*, imprimé à Londres en 1767, cinq ans après la mort de l'auteur.

Cercle répétiteur.

X.

Magellan, jésuite portugais, et Borda, membre de l'académie des sciences, ensuite de l'institut, de plus marin très-distingué, trouvèrent, chacun de leur côté, vers l'année 1774, le moyen d'éviter la vérification préliminaire du parallélisme des miroirs. Ce moyen consiste à reculer l'objectif de la lunette un peu en arrière du grand miroir, et à porter le petit miroir jusqu'auprès du limbe, afin de laisser un grand intervalle entre le petit miroir et l'alidade; ce qui procure l'avantage de pouvoir observer un même objet de deux manières par réflexion, l'une à droite, l'autre à gauche. De là, en faisant concourir de deux manières les images de deux objets, au moyen des mouvemens qu'on peut donner séparément au cercle et aux deux alidades, on déterminera immédiatement la distance angulaire de ces objets.

Ce nouveau cercle a été décrit, quant à la propriété que je viens d'indiquer, par Magellan dans un ouvrage intitulé : *Description des nouveaux instrumens circulaires à réflexion*, imprimé à Londres en 1779; et par Borda dans un ouvrage intitulé : *Description et usage du cercle à réflexion*, imprimé à Paris en 1787. Il a porté, pendant quelque temps, le nom de Magellan qui l'a publié le premier, comme on voit par les dates que

je viens de rapporter; mais Borda s'étant appliqué spécialement, pendant plusieurs années, à le perfectionner et à le répandre, on s'est accoutumé en France, et même dans les pays étrangers, à l'appeler le *cercle de Borda.* Peut-être serait-il plus juste de l'appeler le cercle de Mayer, puisque Mayer en a donné le principe fondamental, qui est la multiplication des angles : de même que l'octant porte toujours le nom de Hadley, quoique d'autres marins, et des artistes y aient fait quelques changemens depuis son origine.

Cercle répétiteur pour les observations ordinaires, géodésiques et astronomiques.

On emploie aussi le cercle répétiteur pour les observations faites à terre, ou dans un observatoire fixe; et alors il devient plus simple : il ne contient, pour pièces principales, que le limbe gradué, et deux lunettes ordinaires, mobiles autour du cercle; de telle manière, que ces trois parties peuvent tourner séparément, ou conjointement, au moyen de vis de pression, que l'on serre ou desserre à volonté.

MM. Cassini, Méchain et Legendre ont fait usage de cet instrument en 1787, pour leurs opérations dont j'ai parlé dans le chapitre précédent. Il a servi également à MM. Méchain et Delambre pour la mesure de l'arc du méridien, compris entre Dunkerque et Barcelonne; ensuite à MM. Biot et Arago, chargés de continuer cette belle opération.

XI.

On doit principalement aux Anglais la découverte ou la perfection de divers instrumens astronomiques et nautiques dans cette quatrième période. Les excellens artistes de cette nation ont presque toujours réuni la théorie à la pratique. Tels ont été Graham, Sisson, Bird, Dollond, Ramsden, et tel est aujourd'hui M. Troughton. La France a eu aussi, à différentes époques, des artistes très-distingués. Nous possédons en ce moment MM. Lenoir, Jecker, Louis Berthoud, qui rivalisent honorablement avec nos voisins.

On attend avec impatience l'ouvrage que M. Lévêque, membre de l'institut de France, doit publier incessamment sur la construction et l'usage des instrumens à réflexion. On y trouvera l'histoire de tous les instrumens qui ont été successivement inventés, et qui ont été employés à la mer pour les observations astronomiques, avec des jugemens raisonnés sur leurs avantages et leurs désavantages, et sur les droits respectifs des inventeurs. L'auteur, profondément versé dans ces matières, s'est proposé (et on peut-être sûr qu'il tiendra parole) d'éclaircir une foule de questions encore indécises et de la plus haute importance pour le salut et le succès de la navigation. On sait que M. Lévêque est, depuis un grand nombre d'années, examinateur

des élèves de la marine française, et qu'au milieu de ces pénibles fonctions, qu'il remplit avec autant de zèle que d'intégrité, il a publié plusieurs excellens ouvrages, entr'autres le *Guide du navigateur*, et la traduction du livre espagnol de *don George Juan*, sur l'art maritime, à laquelle il a joint de savantes notes.

XII.

J'ai du regret de ne pouvoir pas donner une description un peu détaillée du télescope de M. Herschel : découverte mémorable de l'optique moderne. Il me faudrait pour cela le secours de quelques figures, qui me sont ici interdites. Je dirai seulement que ce télescope est construit sur les mêmes principes que celui de Neuton, mais avec divers changemens avantageux, qui ont permis de lui donner de très-grandes dimensions, et par conséquent de recevoir une très-grande quantité de lumière; d'où est résultée la découverte de plusieurs nouveaux phénomènes dans le ciel. J'ai rapporté les principaux. Voyez les *Transactions philosophiques* de la société royale de Londres.

FIN DE LA QUATRIÈME PÉRIODE.

RÉCAPITULATION SUCCINCTE

DES

PRINCIPAUX OBJETS DE CET OUVRAGE.

Première période.

Les anciennes mathématiques nous viennent des Grecs. *Thalès* enseigne à prédire les éclipses. *Pythagore* découvre la fameuse propriété du carré de l'hypothénuse du triangle rectangle. *Hippocrate* de Chio carre les lunules du cercle; fixe la vraie nature du problême de la duplication du cube. *Platon* et ses premiers disciples remarquent la formation et les propriétés primordiales des sections coniques. *Mnechme* pose le fondement de la théorie de lieux géométriques. *Euclide* rassemble en corps d'ouvrage les propositions éparses de la géométrie élémentaire. *Archimède* trouve le rapport de la surface et du solide de la sphère à la surface et au solide du cylindre circonscrit; carre la parabole; détermine le rapport approché de la circonférence du cercle au diamètre; pose les premières lois de l'équilibre pour le levier, et pour les corps solides flottans sur un fluide. *Apollonius* de

Pergée approfondit la théorie des sections coniques, en fait connaître plusieurs nouvelles propriétés; résout divers problèmes de *maximis* et *minimis*, qui s'y rapportent. *Pithéas* observe le premier l'obliquité de l'écliptique. *Erathostène* donne la première mesure du globe de la terre. *Hipparque* jette les fondemens de toutes les théories astronomiques; fait le dénombrement des étoiles alors connues; fixe à peu près la longueur de l'année; remarque le mouvement apparent des étoiles en longitude, d'où dépend la précession des équinoxes. *Ptolémée* réunit dans son *Almageste* toutes les anciennes connaissances astronomiques, et y ajoute quelques théories de son propre fonds.

Seconde période.

Les Arabes inventent les caractères arithmétiques dont tous les peuples de l'Europe ont adopté l'usage; ils trouvent ou développent les premiers principes de l'algèbre; ils traduisent les principaux ouvrages des Grecs, et quelques-uns même de ces ouvrages ne se sont conservés que par ces traductions. L'astronomie est surtout la science à laquelle se sont adonnés les peuples orientaux. On leur doit quelques observations importantes, comme, par exemple, d'avoir déterminé, à peu de chose près, l'obliquité de l'écliptique par rapport au plan de l'équateur ou

de la révolution journalière des astres. Ils portent ces sciences chez quelques peuples de l'Europe.

Troisième période.

Les mathématiques transportées en Europe y font des progrès très-considérables.

L'algèbre et la géométrie marchent des premières : en Italie, ***Scipio Ferrei, Tartaglia, Cardan, Raphaël Bombelli,*** trouvent la résolution générale des équations du troisième et du quatrième degrés : en France, *Viete* perfectionne plusieurs branches particulières de l'algèbre ; enseigne à résoudre, par des constructions géométriques, les équations du troisième degré, d'où dépendent les problèmes de la duplication du cube, et de la trisection de l'angle ; *Descartes* applique l'algèbre à la théorie des lignes courbes, et ouvre par là un champ immense de nouveaux problèmes ; fait de la dioptrique une science analytique ; ***Pascal*** résout les problèmes de la roulette ; ***Fermat*** remarque plusieurs belles propriétés des nombres : en Angleterre, le baron de *Neper* invente le calcul des logarithmes ; *Hariot* étend la théorie de la résolution des équations ; on doit aux géomètres de la même nation le perfectionnement et l'usage des suites infinies : en Hollande, *Huguens* trouve la théorie générale des développées des courbes,

les lois de la force centrale dans le cercle, le tautochronisme de la cycloïde.

Dans l'astronomie, *Copernic* renouvelle ou plutôt démontre le double mouvement de la terre, c'est-à-dire, le mouvement *annuel* autour du soleil, et le mouvement de *rotation journalière*; *Tycho-Brahé* fait une immense quantité d'observations astronomiques de tous les genres; *Képler* découvre les deux fameuses lois sur lesquelles porte toute l'astronomie physique; le télescope est inventé en Hollande; *Galilée* perfectionne cet instrument, et fixe par ce moyen l'existence et la nature des taches du soleil, observe le premier les quatre satellites de Jupiter, etc.; Huguens construit un télescope encore plus parfait, avec lequel il trouve l'un des satellites de Saturne, et les phases de l'anneau qui environne cette planète; *Dominique Cassini* trouve quatre autres satellites à Saturne; *Roemer* démontre la *propagation successive* de la lumière; *Halley* étend et enrichit toutes les branches de l'astronomie; on lui doit en particulier la belle méthode de déterminer la parallaxe du soleil, par le moyen des passages de Vénus devant le disque de cet astre; on perfectionne en général les anciens instrumens d'astronomie; on en invente de nouveaux; les observations se multiplient, et sont portées à un haut degré d'exactitude.

Quatrième période.

Révolution totale dans les mathématiques, par la grande découverte de l'analyse infinitésimale, autrement appelée *la méthode des fluxions.* Cette nouvelle analyse est appliquée à une infinité de problèmes de toute espèce, auxquels ni l'ancienne géométrie, ni l'analyse cartésienne ne pouvaient atteindre. Parmi ces problèmes on distingue principalement ceux des *isopérimètres*, agités si longtemps entre les frères Bernoulli, et qui ont préparé de loin la méthode des variations. Découverte de la fameuse loi de la gravitation que tous les corps de l'univers exercent les uns sur les autres. Premières applications de ce principe. Insignes progrès du calcul intégral ordinaire. Dynamique, science nouvelle; application des principes de cette science au problème de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la terre. Explication physique de l'aberration apparente des étoiles fixes. Découverte des lunettes achromatiques. Instrumens nautiques à double réflexion. Perfection du télescope neutonien. Invention du calcul intégral aux différences partielles; première application de ce calcul aux problèmes des cordes vibrantes, de la propagation du son, etc. Détermination des mouvemens des corps célestes, en ayant égard aux attractions mutuelles de ces corps. Pro-

fondes recherches des géomètres sur ce sujet. Formules analytiques de l'équilibre et du mouvement des fluides. Toutes les parties des mathématiques s'étendent et se perfectionnent. Les géomètres vivans enrichissent tous les jours la science de leurs propres découvertes, et en préparent de nouvelles à leurs successeurs dans une carrière qui n'a pas de bornes.

FIN DE LA RÉCAPITULATION SUCCINCTE.

SUPPLÉMENT.

J'AI oublié, dans cette quatrième période, quelques découvertes intéressantes qui me reviennent en mémoire, et que je vais indiquer brièvement.

I. Une équation différentielle du second ordre entre deux variables, dans laquelle l'une des deux différentielles du premier ordre est supposée *constante*, peut être changée en une équation où l'autre différentielle soit constante. Taylor en a fait le premier la remarque; et en a donné un exemple (*Meth. incr.* pag. 8). Jean Bernoulli a développé complètement cette théorie (Joh. Bern. Op. tom. IV, pag. 77). Il apprend en général à transformer une équation différentielle du second ordre, où l'une des deux différentielles du premier ordre est constante, en une autre équation où rien n'est constant; ce qui procure ensuite l'avantage de pouvoir prendre pour quantité constante, ou l'autre différentielle du premier ordre, ou le produit de l'une des deux différentielles du premier ordre par une fonction des deux variables : avantage considérable pour faciliter l'intégration.

Il en est de même pour une équation différentielle du troisième ordre, comparativement à une équation du second; pour une équation du qua-

trième ordre, comparativement à une équation du troisième, etc.

II. Toute équation différentielle du second ordre entre deux variables, a deux intégrales aux premières différences; une équation aux troisièmes différences, a trois intégrales aux secondes différences; ainsi de suite. Fontaine a fait le premier cette remarque (Voyez *ses Œuvres*, pag. 84.). Mais les méthodes qu'il propose ensuite pour trouver les intégrales sont tellement compliquées, qu'on n'en a jamais fait, et qu'on n'en fera peut-être jamais aucun usage. Euler a traité cette matière avec la clarté et l'élégance qui lui sont ordinaires (Acad. de Pétersbourg, an 1771). Il enseigne à trouver les deux intégrales, pour plusieurs équations différentielles du second ordre; et en combinant ensemble les deux intégrales, il arrive, en certains cas, à l'équation finie, d'une manière très-simple.

III. *Charles*, membre de l'académie des sciences, a fait sur *les équations aux différences finies*, une observation très-curieuse; savoir, que certaines équations de cette espèce peuvent avoir deux intégrales distinctes, contenant chacune une constante arbitraire. Ensuite il examine ce que deviennent ces deux intégrales, dans le cas où les différences sont supposées infiniment petites. (Acad. de

Paris, an. 1786 et 1788). Il avait un très-grand talent pour l'analyse; il mourut en 1791, à l'âge de trente-neuf ans.

IV. D'après le principe que Jacques Bernoulli et d'Alembert ont donné pour résoudre les problèmes de dynamique, tous ces problèmes peuvent être rappelés aux lois de l'équilibre. D'un autre côté, M. Lagrange a enseigné (*Méc. anal.* 1787) à déterminer en général les conditions de l'équilibre par le principe *des vitesses virtuelles,* considéré comme une loi primordiale de la nature. Mais M. *Fossombroni,* célèbre géomètre, membre de *l'institut de Bologne,* et de la *société italienne,* n'ayant pas jugé ce principe d'une assez grande évidence *à priori*, en a cherché et en a trouvé une démonstration directe et rigoureuse, dans l'équilibre d'un système de corps qui étant liés solidement entr'eux d'une manière quelconque, demeurent toujours à égales distances les uns des autres, quel que soit le mouvement qu'on imprime au système. Il prend les équations de cet équilibre, déjà connues, et fondées sur la composition et décomposition des forces. De là, par un heureux développement de calcul, il arrive *à l'équation des momens,* telle qu'elle résulte du principe des vitesses virtuelles. De plus il parvient à découvrir qu'outre l'équation des momens, il y a, en plusieurs cas d'é-

quilibre, une *autre équation aux différences finies*, qu'il appelle *équation des forces*, qu'on n'avait pas encore remarquée, et d'où il déduit un théorème également nouveau de mécanique, qui fait connaître toutes les circonstances nécessaires pour qu'une telle équation ait lieu (*Memoria sul principio delle velocità virtuali, etc. Firenze*, 1796).

V. On trouve dans le tome premier *des Mémoires presentés à l'institut de France*, publiés en 1806, cinq excellens mémoires de M. *Parseval*, lesquels roulent sur des questions de la plus profonde géométrie; ils ne sont pas ici susceptibles d'extraits. Je me borne à citer celui qui a pour objet *l'intégration générale et complète des équations de la propagation du son, l'air étant considéré avec ses trois dimensions*; par où l'on pourra se faire une idée générale du savoir et de la sagacité de l'auteur.

FIN DU SUPPLÉMENT.

TABLE

DES CHAPITRES

CONTENUS DANS LE SECOND VOLUME.

PÉRIODE QUATRIÈME.

FIN DE LA TABLE DES CHAPITRES.

TABLE ALPHABÉTIQUE
DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LES DEUX VOLUMES DE CET OUVRAGE.

(I désigne le premier volume, et II le second. Les chiffres arabes désignent les pages.)

A

C

D

E

G

I

K

L

N

S

T

V

FIN DE LA TABLE ALPHABÉTIQUE.

TABLE Chronologique et Alphabétique des plus célèbres

Siècles.	Commencement de chaque siècle.	Milieu.	Fin.
Av. J.-C.		Chiron.	
900			
800			Nicepsos, Petosiris.
700		Euphorbas.	
600	Timée.	Anaximandre, Œnopide, Pythagore, Thalès.	
500	Anaxagore.	Euctémon, Méton.	Eudoxe.
400	Aristée, Aristille, Euclide, Eudémus, Timocharis, Xénocrates.	Aristote, Calippe, Hippocrate, Pythéas.	Architas, Dinostrate, Ménechme, Platon, Philolaus.
300	Amyclas, Archimède.	Apollonius, Bérose, Conon, Nicomède.	Aristarque, Démétrius, Théophraste.
200		Ctésibius, Dioclès, Héron, Hipparque.	Dosithée, Eratosthènes, Hypsiclès.
100	Vitruve.	J. César, Posidonius, Sosigènes, Zénodore.	Géminus, Théodose.
Ap. J. C.	Trasylle.		Ménélaus.
100	Nicomaque, Ptolémée.	Diophante.	Philon, Sérénus.
200			Porphyre.
300		Jamblique, Pappus, Théon.	Hippathie, fille de Théon.
400	Marinus, Proclus, Cleomèdes.	Eutocius.	
500		Anthémius.	
600			
700	Alcuin, Bède.		Mohammed Ben Musa.
800	Charlemagne, Géber.	Alfraganus, Psellus,	

Mathématiciens morts, depuis le commencement des temps *.

Siècles.	Commencement de chaque siècle.	Milieu.	Fin.
Ap. J. C. 900	Albatégnius.		Ebn Ionis.
1000	Gerbert.	Alhazen.	Arzachel.
1100			Campanus, Gérard.
1200	Roger Bacon, Nassir-Eddin.	Albert-le-Grand, Peccam, Sacrobosco, Vitellion.	Thébit.
1300	Bradwardin, Suisset.		
1400	Purbach.	Ulug Beig, Cusa, Regiomontanus.	Copernic, Lucas de Borgo, Léonard de Pise, Schonerus, Walther.
1500	Boëthius, Buteo, Cardan, Commandine, Albert Durer, Ferréi, Maurolic, Nonius, Scheubell, Sturnius, Tartalea.	Apian, Memmius, Record, Ramus, Rothman, Saville, Stiffelius, Guido, Ubaldi, Vennatorius, Zamberti.	Anderson, Tycho-Brahé, Bombetti, Brig, Castelli, Clavius, Digges, Ferrari, Ghetaldus, Maestlin, Rhéticus, Viète.
1600	Adrianus Romanus, Lord Bacon, Barlaam, Bayer, Beaugrand, de Beaune, Briggs, Van Culen, Descartes, de Dominis, Galilée, Gassendi, Gellibrand, Guldin, Harriot, Horrox, Képler, Longomontanus, Valérius Lucas, Mydorge, Métius, Napier, Otho, Oughtred, Léonard de Vinci, Pitiscus, Planud, J. B. Porta, Scheiner, Stévin, Torricelli, Ursinus, Wrigt.	Borelli, Bartholin, Brounker, Bouilhaud, Cavalleri, Deschalès, Fermat, Frénicle, Albert Girard, Jacques et David Grégori, Henrion, Van Heuraet, Hévélius, Horrébow, Kircher, Mersenne, Niel, Norvood, Pascal, Riccioli, Roberval, Sluse, Snellius, Taquet, Tschirnhaus, Grégoire de St.-Vincent, Viviani, Ulacq, Wallis, Seth Ward, Jean de Witt.	Amontons, Auzout, Bachet, Barrow, Jacques Bernoulli, Collins, Fagnani, Flamstéed, Guido Grandi, Grimaldi, L'Hôpital, Huddes, Hook, Huygens, Kersey, Kinkhuysen, Leibnitz, Lieutaud, Mercator, Molyneux, Mouton, Neuton, Pell, Picard, Ricci, Roemer, Rolle, Renaldinus, Schooten, Wren.
1700	Jean Bernoulli, de Billy, Bradley, Braikenrigde, Dominique et Jacques Cassini, Cotes, Craig, s'Gravsende, Halley, la Hire, don Georges Juan, Keil, Lagny, Laloubère, Lansberg, Maclaurin, Meibonius, Manfredi, Marchetti, Hugues d'Omérique, Ozanam, Prestet, Reyneau, Saunderson, Saurin, Sterling, Brook, Taylor, don Ullon, Varignon, le P. Verbiest, Wolf.	D'Alembert, Daniel Bernoulli, Bouguer, La Caille, Clairaut, Collins, Courtivron, Cramer, Dodson, Dollon, Fatio, Fontaine, Goldbach, Guisnée, Herman, le P. Jacquier, Kœnig, le P. Leseur, Mairan, Mariotte, Maupertuis, Mayer, de Moivre, Monmort, Nicole, Riccati, Robins, Robert Simson, Thomas Simpson, Walmsley.	Bailly, Bezout, Borda, Boscovitch, Emerson, Euler, Kaestner, Landen, La Lande, Montucla, Pingré, Math. Stewart, Vandermonde, Wargentin, Waring.

* Cette Table est de M. Bonnycastle, célèbre professeur de mathématiques à l'Ecole Royale de Woolwich, qui l'a mise à la suite d'une très-belle traduction anglaise dont il a honoré mon *Essai sur l'Histoire des Mathématiques*.

LIVRES

Qui se trouvent chez F. LOUIS, Libraire à Paris, rue de Savoie, n.° 6.

Art de la Correspondance (l'), renfermant, 1.° les règles de l'art de la correspondance, lettres de commerce, lettres sur divers sujets; 2.° lettres choisies du lord Chesterfield, de milady Montague, Pline le jeune, Sénèque, Cicéron, Boileau, Racine, Voltaire, J.-J. Rousseau, etc., troisième édit., 1804, in-12, 2 l. 10 s.

Avis d'une mère à son fils, suivis du traité de l'amitié; des réflexions sur les richesses; de Psyché; du dialogue entre Alexandre et Diogène sur l'égalité des biens, par madame de Lambert, in-12, p. p. 1804, 1 l. 5 s.

Avis d'une mère à sa fille, suivis des réflexions sur les femmes; des réflexions sur le goût; d'un discours sur la délicatesse d'esprit et de sentiment, et d'une lettre sur l'éducation, par madame de Lambert, in-12, p. p. 1804, 1 l. 5 s.

Beaux exemples de piété filiale, de concorde fraternelle, de reconnaissance, de respect envers la vieillesse, etc., pour servir de lectures morales dans les maisons d'éducation, et pour être donnés en prix à la jeunesse, troisième édition, par Fréville, in-12, fig., 1809, 2 l. 10 s.

Bezout, Cours de Mathématiques, à l'usage de la marine et de l'artillerie, avec des additions par F. Peyrard, in-8, 4 vol. fig., quatrième édition, 1808, 18 l.

On vend séparément :

Arithmétique.	3 l.	19 l.
Géométrie	6 l.	
Algèbre	6 l.	
* Statique et calcul différentiel, et calcul intégral, etc.	4 l.	

* *Nota.* F. Peyrard n'a mis des additions qu'à l'Arithmétique, à la Géométrie et à l'Algèbre.

Traité de navigation, par Bezout, in-8. fig. 5 l.

Bezout, tomes 4 et 5, contenant les principes généraux de la mécanique, édition originale, Paris, fig. 8 l.

Botanique (la) de J.-J. Rousseau, contenant tout ce qu'il a écrit sur cette science; avec une exposition de la méthode botanique de M. de Jussieu, et la manière de former les herbiers, par M. Haüy, in-12, 1802, 2 l. 10 s.

Contes (les) jaunes, les Fêtes de la jeunesse et le Jardin des pensées, par A. J. Fréville, 5.e édition, entièrement refondue et très-augmentée, in-18, fig. 1808, 1 l.

Contes (les) jaunes, suivis des Fêtes de la jeunesse et du Jardin des pensées, quatrième édition, ornée de 37 fig. par A. J. Fréville. On a réuni à la fin de cet ouvrage quelques fables en prose, de Fénélon, et quelques-unes en vers, par Boisard, Lamotte, Barbe, Lemonnier, Aubert. Il est terminé par la fameuse ballade des enfans abandonnés dans la forêt, in-18, 2 vol. papier fin d'Angoulême, fig., 1804, 3 l.

Élémens de Navigation, par N. C. Duval-le-Roi, associé non résident de l'institut national, et professeur de mathématiques aux écoles de navigation, Brest, in-8, fig. 1802, 6 l.

Élémens d'histoire naturelle, par A. L. Millin, troisième édition, fig. 1802, 8 l.

Essai sur l'histoire générale des mathématiques, par C. Bossut, in-8, 2 vol. portrait, 1802, 12 l.

Essais de Michel Montaigne, édition nouvelle, où se trouvent ses lettres, et le traité de la servitude, de la Boétie, ou le contr'un, in-18, 16 vol. portrait, 1801, 16 l.

Euclide. Élémens de géométrie, traduits littéralement, et suivis d'un traité du cercle, du cylindre, du cône et de la sphère, de la mesure des surfaces et des solides, avec des notes, *seconde édition* augmentée du cinquième livre, par F. Peyrard, professeur de mathématiques et d'astronomie au lycée Bonaparte, ouvrage approuvé par l'Institut et adopté pour les bibliothéques des lycées, in-8, 9 pl., 1809, 6 l.

Fables de La Fontaine, nouvelle édition, plus complète que les précédentes, ornées de 202 gravures en bois, de

Godard, qui paraissent pour la première fois, avec les notes et remarques choisies de Coste et de Champfort, la vie et l'éloge de La Fontaine, in-12, 2 vol. 1801, 6 l.

Fables de Florian, in-18, 1807, fig. 2 l.

Idem, en papier vélin, 3 l.

Cette édition, imprimée par P. Didot, aîné, est très-correcte et très-belle.

Grammaire (nouvelle) Anglaise, divisée en 5 livres, contenant : 1.° un système complet de prononciation ; 2.° l'analyse des parties du discours ; 3.° une syntaxe très-étendue ; 4.° un choix d'idiomes anglais et français ; 5.° un traité de la prosodie anglaise ; le tout suivi d'un choix de pièces en prose et en vers, et d'un tableau des prépositions anglaises, par J. Turner, in-8, 1809, 5 l.

Grammaire notée (la), ou les parties du discours démontrées par des signes analytiques qui ne laissent aucun doute sur le principe, la syntaxe et l'ortographe des participes français, par A. F. J. Fréville, 1803, in-12, 1 l. 5 s.

Histoire des ordres religieux et militaires, par le P. Helyot, in-4, 8 vol. ornés de 812 fig. 200 l.

Le même livre, avec les figures coloriées, 400 l.

Histoire des Chiens célèbres, entremêlées de notices curieuses sur l'histoire naturelle, pour donner le goût de la lecture à la jeunesse, par A. J. Fréville, 2.e édition, ornée de 9 gravures, dont trois représentent 22 espèces de chiens, 2 vol., 1808, 5 l.

Lettres choisies du lord Chesterfield à son fils Stanhope, sur les vertus, les qualités et les grâces les plus nécessaires pour plaire, briller et réussir dans la société, in-18, 1804, 1 l. 5 s.

Ministre (le) de Wakefield, traduction nouvelle de l'anglais de Goldsmith, par E. A***, in-12, fig., 2 l. 10 s.

Morale (la) en exemples, par l'auteur de la morale en action, avec une fig. Lyon, 3 gros vol. 1801, 7 l. 10 s.

Œuvres de Florian, ornées de magnifiques gravures, in-8, 8 vol. Paris, 1803, 60 l.

Œuvres de Florian, Paris, édition originale, papier d'Angoulême, 85 gravures, 15 vol. in-18, comprenant :

Nouvelles	2	15 vol. 45 l.
Gonzalve	3	
Numa Pompilius . .	2	
Théâtre	3	
Estelle	1	
Galathée	1	
Fables	1	
Mélanges	1	
Œuvres posthumes.	1	

La même édition originale, Paris, papier ordinaire, une fig. à chaque volume, 15 vol. 15 l.

Œuvres de Pope (choisies), in-18, 3 vol. grand-raisin, 7 l. 10 s.

Oraisons funèbres de Fléchier et de Bossuet, Paris, pap. vélin, in-12, 2 vol. portraits, 1802, 4 l.

Paradis perdu (le), traduit de l'anglais de Milton, par J. Mosneron, avec la vie de *Milton* et des *remarques,* in-12, 1804, 3 l.

Cette traduction, bien supérieure à toutes les précédentes, rend fidèlement et énergiquement les beautés sublimes et touchantes du poëte anglais.

Saisons (les) de Thompson, poëme, in-18, grand-raisin, nouvelle traduction, 2 l. 10 s.

Spectacle (le) de la nature, ou entretiens sur les particularités de l'histoire naturelle, qui ont paru les plus propres à rendre les jeunes gens curieux, et à leur former l'esprit, par Pluche, in-12, 11 vol. fig. Paris, 33 l.

Syllabaire grammatical, orné de 25 vignettes et de jolis médaillons, par Fréville, 2.e édition, in-12, 1808, 1 l.

Syllabaire des jeux de l'enfance, suivi des petits dialogues de la jeune famille, et orné de 30 gravures représentant les amusemens du premier âge, par Fréville, in-12, 2.e edition, 1808, 1 l.

Tableau de Paris, par Mercier, édition complète, 1784 à 1788, in-8, 12 vol. 48 l.

Tableau de Paris, in-12, 12 vol. 24 l.

Traité de Minéralogie, par Haüy, in-8, 4 vol. de texte et 1 vol. de planches, 1801, 36 l.

Le même livre, in-4, 72 l.